CAPÍTULO 2. O SISTEMA DE NÚMEROS NATURAIS

Sumário

Intuitivamente, os números naturais são: 0, o que vem a seguir de 0 chamado 1, depois de 1 a seguir é 2, ... e assim por diante ...

Formalmente, o conjunto de números naturais é definido pelos axiomas de Peano.

1. Axiomas de Peano

Um conjunto $\mathbb{N}$, junto com uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (chamada sucessor) representa um sistema de números naturais se as seguintes propriedades (axiomas) são satisfeitas:

P1. Existe um único elemento, denotado por 0, que não é o sucessor de nenhum outro elemento, ou seja,
$$s(n) \neq 0 \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N},$$
$$\text{e para todo } \ m \neq 0 \ \text{ existe } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ s(n) = m.$$

P2. s é injetiva, ou seja, se $s(m) = s(n)$ então $m = n$. Em outras palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

P3. (Princípio da indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que:
- $0 \in X$,
- se para todo $n \in X$ tem-se também que $s(n) \in X$

então $X = \mathbb{N}$.

Lema 1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq n$, ou seja, todo número natural é diferente do seu sucessor.*

Demonstração. Seja
$$X = \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq n\}.$$
- $0 \in X$ já que 0 não é o sucessor de nenhum número, e em particular, $s(0) \neq 0$.
- Suponha que $n \in X$, ou seja, $s(n) \neq n$.
  Como S é injetiva, segue que
  $$s(s(n)) \neq s(n),$$
  portanto $s(n) \in X$.

Pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $s(n) \neq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação 1.1. O princípio da indução pode ser enunciado da seguinte maneira equivalente.

Seja $P(n)$ uma propriedade que se refere aos números naturais. Suponha que as seguintes afirmações sejam válidas:
- Base de indução (ou 1º passo)
  $P(0)$ é verdadeira
- Passo indutivo
  Suponha que $P(n)$ seja verdadeira (hipótese de indução).
  A partir dessa hipótese, prova-se que $P(s(n))$ seja verdadeira.

Então pelo princípio da indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, se definimos

$$X = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\},$$

tem-se:

- $0 \in X$
- Se $n \in X$ então $s(n) \in X$.

Logo, pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2. Prove que se $x \neq 1$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, prove que a propriedade/fórmula $P(n)$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Usamos o princípio da indução.

- 1º passo, ou seja, o caso $n = 0$.

A propriedade $P(0)$ significa $1 = \dfrac{x-1}{x-1}$, que é claramente válida se $x \neq 1$.

- Passo indutivo.

Suponha que $P(n)$ valha, ou seja

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Vamos provar que $P(n+1)$ vale também. Tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x - 1} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} \\
&= \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1},
\end{aligned}$$

provando que $P(n+1)$ é válida.

Pelo princípio da indução, a fórmula $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Adição e multiplicação

Dado um número natural m, definimos a soma $m + 0$ como sendo m, a soma $m + 1$ como sendo o sucessor $s(m)$ de m, a soma $m + 2$ como sendo o sucessor de $m + 1$ e assim por diante.

Formalmente, a adição por n é definida por indução.

Definição 2.1. Seja $m \in \mathbb{N}$. Então

- $m + 0 = m$.
- Se $m + n$ foi definido, então $m + s(n) = s(m + n)$.

Observe que $m+1 = m+s(0) = s(m)$, isto é, $m+1$ é o sucessor de m. Então em argumentos por indução, em geral escreveremos $m + 1$ em vez de $s(m)$.

A adição de números naturais satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.1. *Sejam $m, p, n \in \mathbb{N}$.*

(i) (associatividade) $(m + p) + n = m + (p + n)$.
(ii) (comutatividade) $m + n = n + m$.
(iii) Se $m + n = p + n$ então $m = p$.

Demonstração. Vamos provar (i) e (iii). O item (ii) é exercício.

(i) Fixemos $m, p \in \mathbb{N}$ e provemos a seguinte propriedade para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$P(n): \quad (m + p) + n = m + (p + n).$$

Usamos indução matemática.

- Base da indução: seja $n = 0$. Então $(m + p) + 0 = m + p = m + (p + 0)$, logo $P(0)$ vale.

- Passo de indução: suponha que $P(n)$ seja verdadeiro, isto é,

$$(m + p) + n = m + (p + n).$$

Vamos provar $P(s(n))$. De fato,

$$\begin{aligned}
(m + p) + s(n) &= s((m + p) + n) \quad \text{(pela definição da adição)} \\
&= s(m + (p + n)) \quad \text{(pela hipótese de indução)} \\
&= m + s(p + n) \quad \text{(pela definição da adição)} \\
&= m + (p + s(n)) \quad \text{(de novo pela definição da adição)}
\end{aligned}$$

o que estabelece $P(s(n))$.

Pelo princípio da indução, $(m + p) + n = m + (p + n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Fixamos $m, p \in \mathbb{N}$ e vamos provar por indução em $n \in \mathbb{N}$ que

$$\text{se } m + n = p + n \text{ então } m = p.$$

- Base de indução: $n = 0$.

Se $m + 0 = p + 0$ então claramente $m = p$.

- Passo de indução: suponha a afirmação verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, ou seja, se $m + n = p + n$ então $m = p$.

Vamos provar a afirmação para $s(n)$. De fato, se

$$m + s(n) = p + s(n),$$

então pela definição da adição tem-se $s(m + n) = s(p + n)$.

Mas como a função sucessão é injetiva, segue que $m + n = p + n$, e pela hipótese de indução concluímos que $m = p$.

Pelo princípio de indução, a conclusão segue. □

Seja m um número natural. Definimos $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot 1 = m$, $m \cdot 2 = m+m$, $m \cdot 3 = m+m+m$ e etc. Formalmente, a multiplicação de números naturais é definida por indução como seguinte.

Definição 2.2. Seja $m \in \mathbb{N}$. Então,

- $m \cdot 0 = 0$
- Se $m \cdot n$ já foi definido então definimos $m \cdot s(n) = m \cdot n + m$.

Como $s(n) = n + 1$, temos que $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Em particular, $m \cdot 1 = m \cdot 0 + m = 0 + m = m$, $m \cdot 2 = m \cdot 1 + m = m + m$ e etc., como intuitivamente esperado.

A multiplicação de números naturais satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.2. *Sejam $m, p, n \in \mathbb{N}$.*

(i) (distributividade) $m \cdot (p + n) = m \cdot p + m \cdot n$
(ii) (associatividade) $m \cdot (p \cdot n) = (m \cdot p) \cdot n$
(iii) (comutatividade) $m \cdot n = n \cdot m$
(iv) Se $m \cdot p = n \cdot p$ e $p \neq 0$ então $m = n$.

Demonstração. Vamos provar a distributividade e deixar as outras propriedades como exercícios.

(i) Fixamos $m, p \in \mathbb{N}$ e vamos provar por indução que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot (p + n) = m \cdot p + m \cdot n.$$

- Base de indução: $n = 0$. Temos

$$m \cdot (p + 0) = m \cdot p = m \cdot p + m \cdot 0.$$

- Passo de indução: suponha que

$$m \cdot (p + n) = m \cdot p + m \cdot n.$$

Vamos provar a mesma propriedade para $s(n)$. De fato,

$$\begin{aligned} m \cdot (p + s(n)) &= m \cdot s(p + n) \\ &= m \cdot (p + n) + m \\ &= (m \cdot p + m \cdot n) + m \\ &= m \cdot p + (m \cdot n + m) \\ &= m \cdot p + m \cdot s(n). \end{aligned}$$

Pelo princípio da indução, a distributividade vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação 2.1. Pelo princípio da indução, dada uma propriedade $P(n)$ que se refere aos números naturais, para provar que ela seja verdadeira para todo $n \geq n_0$ basta provar as seguintes afirmações:

1) Base de indução. $P(n_0)$ é verdadeira.

2) Passo indutivo. Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \geq n_0$. Então $P(s(n))$ é verdadeira.

De fato, podemos definir o conjunto

$$X = \{m \in \mathbb{N} : P(n_0 + m) \text{ é verdadeira}\}.$$

Temos que:

- $0 \in X$ já que $P(n_0)$ é verdadeira (pela base de indução).
- Se $m \in X$, então para $n := n_0 + m$ temos que $P(n) = P(n_0 + m)$ é verdadeira. Então, pelo passo indutivo, $P(n + 1) = P(n_0 + m + 1)$ é verdadeira, ou seja, $m + 1 \in X$.

Logo, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 2.1. Para todo $n \geq 1$,

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Na verdade deveríamos escrever a fórmula acima como

$$2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1),$$

já que ainda não definimos frações.

Demonstração. Base de indução: começamos com $n = 1$. A fórmula se torna $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$ que evidentemente vale.

Passo de indução: suponha que

$$2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1)$$

e vamos provar o mesmo para $n + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 2 + ... + n + (n + 1)) &= 2 \cdot (1 + 2 + ... + n) + 2 \cdot (n + 1) \\ &= n \cdot (n + 1) + 2 \cdot (n + 1) \quad \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= (n + 2) \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot (n + 2). \end{aligned}$$

Pelo princípio da indução, a fórmula vale para todo $n \geq 1$. □