CAPÍTULO 3. NÚMEROS RACIONAIS

Sumário

1. O conjunto de números racionais

Números racionais são intuitivamente quocientes de números inteiros $\frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

Observe que Os quocientes $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{-6}{-9}$ etc representam o mesmo número racional.

Vamos formalizar este conceito.

Primeiro, dado um conjunto X e uma relação de equivalência $\sim$ em X, se $x \in X$ denotamos por

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

o conjunto de todos os elementos de X equivalentes a x, ou seja, a classe de equivalência de x.

Observe que todo elemento de X pertence à sua própria classe de equivalência:

$$x \sim x, \text{ então } x \in [x]$$

Além disso, se $x \sim y$ então $y \sim x$ e $[x] = [y]$.

Denotamos por $X/\sim$ o conjunto de todas as classes de equivalência (o conjunto quociente), ou seja,

$$X/\sim := \{[x] \colon x \in X\}.$$

No produto cartesiano

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\},$$

definimos a relação

$$(m, n) \sim (m', n') \text{ se } m \cdot n' = n \cdot m'$$

Por exemplo:
$(2, 3) \sim (4, 6)$ porque $2 \times 6 = 3 \times 4$
$(4, 6) \sim (-6, -9)$ porque $4 \times (-9) = 6 \times (-6)$.

Acontece que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Denotamos o conjunto de classes de equivalência

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim \text{ por } \mathbb{Q},$$

e o chamamos do conjunto dos números racionais.

Denotamos a classe de equivalência $[(m,n)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{m}{n}$.
Assim, um número racional é uma relação de equivalência de pares de números inteiros (m,n) que são propositionorcionais.

Exemplo 1.1. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque $2 \times 6 = 3 \times 4$.
Similarmente, $\frac{4}{6} = \frac{-6}{-9}$ porque $4 \times (-9) = 6 \times (-6)$.

Definimos as operações algébricas entre números racionais como seguinte.

- **Adição.**
$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}\,.$$

A adição é bem definida, no sentido que se $(m,n) \sim (m',n')$ e $(p,q) \sim (p',q')$ então
$$(m \cdot q + n \cdot p, n \cdot q) \sim (m' \cdot q' + n' \cdot p', n' \cdot q').$$

- **Multiplicação.**
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}\,.$$

A multiplicação é bem definida, no sentido que se $(m,n) \sim (m',n')$ e $(p,q) \sim (p',q')$ então
$$(m \cdot p, n \cdot q) \sim (m' \cdot p', n' \cdot q').$$

De fato,
$(m,n) \sim (m',n') \Rightarrow m \cdot n' = n \cdot m'$
$(p,q) \sim (p',q') \Rightarrow p \cdot q' = q \cdot p'$
Multiplicando as duas identidades acima, tem-se
$$(m \cdot n') \cdot (p \cdot q') = (n \cdot n') \cdot (q \cdot p')$$
Usando as propositionriedades básicas das operações com números inteiros, concluímos que
$$(m \cdot p) \cdot (n' \cdot q') = (n \cdot q) \cdot (n' \cdot p'),$$
mostrando que $(m \cdot p, n \cdot q) \sim (m' \cdot p', n' \cdot q')$.

A adição e multiplicação de números racionais satisfazem as propositionriedades conhecidas (comutatividade, associatividade, elemento neutro e inverso, distributividade), então $\mathbb{Q}$ é um *corpo*.

Além disso, definimos
$$\frac{m}{n} \geq 0 \text{ se } m \cdot n \geq 0,$$
e
$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \text{ se } \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \geq 0.$$
Então "$\leq$" é uma relação de ordem total em $\mathbb{Q}$ compatível com as operações algébricas, tornando $\mathbb{Q}$ um *corpo ordenado*.

Lema 1.2. *$\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável infinito.*

Demonstração. Como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*$ são enumeráveis, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ também é enumerável.

Dado um número racional r, seja $\frac{m}{n}$ sua representação como quociente tal que $n > 0$ e m, n não têm nenhum divisor em comum.

Por exemplo, para o número $-\frac{9}{6}$ escolhemos a representação $\frac{-3}{2}$.

A função $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dada por $f(r) = (m, n)$, onde $\frac{m}{n}$ é a representação de r descrita acima, é claramente injetiva.

Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, por um teorema anterior, $\mathbb{Q}$ também é. $\square$

2. Corpos

Um conjunto não vazio K, munido de duas operações binárias $+$ e $\cdot$, chamadas de adição e multiplicação, é um corpo se as seguintes propositionriedades (ou axiomas) são satisfeitas:

Axiomas da adição:

1) Associatividade: para todo $x, y, z \in K$,
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

2) Comutatividade: para todo $x, y \in K$,
$$x + y = y + x$$

3) Elemento neutro: existe um elemento $0 \in K$ tal que
$$x + 0 = x \quad \text{para todo } x \in K$$

4) Elemento inverso (ou simétrico): para todo $x \in K$ existe um elemento $-x \in K$ tal que
$$x + (-x) = 0$$

Axiomas da multiplicação:

5) Associatividade: para todo $x, y, z \in K$,
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

6) Comutatividade: para todo $x, y \in K$,
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

7) Elemento neutro: existe um elemento $1 \in K$ tal que
$$x \cdot 1 = x \quad \text{para todo } x \in K.$$

8) Inverso multiplicativo: para todo $x \in K$ existe um elemento $x^{-1} \in K$ tal que
$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

9) Axioma da distributividade: para todo $x, y, z \in K$,
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Observação. Os elementos neutros para adição e multiplicação são únicos.

De fato, se $x + 0 = x$ e $x + 0' = x$ para todo $x \in K$, então

$$0' + 0 = 0'$$

e

$$0 + 0' = 0$$

Mas $0' + 0 = 0 + 0'$, logo $0' = 0$.
Similarmente para multiplicação.

Observação. $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in K$.
De fato, $0 + 0 = 0$, então para todo $x \in K$,

$$x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$$

logo

$$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$$

Somando $-x \cdot 0$ nos dois lados,

$$(-x \cdot 0 + x \cdot 0) + x \cdot 0 = -x \cdot 0 + x \cdot 0$$

$$\Rightarrow 0 + x \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

Observação. O inverso aditivo e multiplicativo são únicos.

De fato, se $x + y = 0$ e $x + z = 0$, então
$z + (x + y) = z + 0$
$\Rightarrow (z + x) + y = z$
$\Rightarrow (x + z) + y = z$
$\Rightarrow 0 + y = z$
$\Rightarrow y = z$.
Similarmente para produto.

Observação. Se $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

De fato, se $x \neq 0$, então x tem um inverso multiplicativo x^{-1}. Logo
$x \cdot y = 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$
$\Rightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0$
$\Rightarrow 1 \cdot y = 0$
$\Rightarrow y = 0$

Observação. Se $1 = 0$ então $x = 0$ para todo $x \in K$, ou seja, $K = \{0\}$.
De fato, se $x \in K$ então

$$x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0.$$

A partir de agora vamos sempre supor que $1 \neq 0$.

Exemplo: $\mathbb{Q}$ é um corpo. Deixamos a verificação dos axiomas como exercício.

Exemplo: Seja $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, munido da soma e do produto módulo 2. Mais precisamente, as tabelas de adição e multiplicação de elementos em $\mathbb{Z}_2$ são:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Então $\mathbb{Z}_2$ é um corpo, onde 0 é o elemento neutro para + e 1 é o elemento neutro para $\cdot$ (exercício).

Exemplo: Seja $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ com a adição e multiplicação módulo 3. Por exemplo,

$$1 + 2 = 3 \bmod 3 = 0,$$

$$2 + 2 = 4 \bmod 3 = 1,$$

$$2 \cdot 1 = 2 \bmod 3 = 2.$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Então $\mathbb{Z}_3$ é um corpo.

Exemplo. O conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, munido da soma e do produto módulo 4 não é um corpo.
De fato, $2 \cdot 2 = 4 \bmod 4 = 0$.
Num corpo K qualquer, se $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
Como $2 \neq 0$, $\mathbb{Z}_4$ não pode ser um corpo.

Exercício. Mostre que dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, munido das operações algébricas módulo n é um corpo se, e somente se, n é um número primo.

Observação. Seja K um corpo. Se $x \in K$ tem-se

$$x + (-x) = 0,$$

então o inverso aditivo de $-x$ é x, ou seja,

$$-(-x) = x.$$

Além disso,

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

logo

$$(-1) \cdot x = -x.$$

Em particular,

$$(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1.$$

Ademais,

$$\begin{aligned}(-x) \cdot (-x) &= ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot x) \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot x \\ &= 1 \cdot x^2 = x^2,\end{aligned}$$

logo

$$(-x)^2 = x^2,$$

onde $x^2 \overset{\text{def}}{=} x \cdot x$.

3. Corpos ordenados

Um corpo ordenado é um corpo K que contém um subconjunto $P \subset K$ com as seguintes propositionriedades:

(1) Se $x, y \in P$ então $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.
(2) Dado $x \in K$, tem-se $x \in P$ ou $-x \in P$. Se $x \in P$ e $-x \in P$ então $x = 0$.

O conjunto P se chama o subconjunto de elementos não-negativos de K. Ele determina uma relação de ordem como segue:

$$x \leq y \quad \text{se} \quad y - x \in P.$$

Em particular, isto significa

$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad &\text{se} \quad x = x - 0 \in P, \\ x \leq 0 \quad &\text{se} \ -x = 0 - x \in P. \end{aligned}$$

Proposição 3.1. *A relação "$\leq$" definida acima é uma relação de ordem total em K, compatível com as operações algébricas. Ou seja,*

(i) $x \leq x$.
(ii) Se $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *então* $x = y$.
(iii) Se $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *então* $x \leq z$.
(iv) Se $x \leq y$ *então* $x + z \leq y + z$.
(v) Se $x \leq y$ *e* $z \geq 0$ *então* $x \cdot z \leq y \cdot z$.
(vi) Para todo $x, y \in K$, *tem-se* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

Demonstração. (i) $x - x = 0$ e $0 \in \mathbb{P}$ então $x \in x$.
Temos que $0 \in \mathbb{P}$ porque para todo $x \in K$, $x \in \mathbb{P}$ ou $-x \in \mathbb{P}$. Mas $-0 = 0$, então $0 \in \mathbb{P}$.

(ii) Se $x \leq y$ então $y - x \in \mathbb{P}$
Se $y \leq x$ então $x - y \in \mathbb{P}$
Mas $(x - y) + (y - x) = x + (-y) + y + (-x) = x + 0 + (-x) = 0$
então $y - x = -(x - y)$
Logo, $x - y \in \mathbb{P}$ e $-(x - y) = y - x \in \mathbb{P}$, o que implica $x - y = 0$, e daí, $x = y$.

(iii) Exercício.

(iv) Temos que
$(y + z) - (x + z) = y + z - x - z = y - x$
Como $x \leq y$, $y - x \geq 0$, então $x + z \leq y + z$.

(v) Exercício.
(vi) Sejam $x, y \in K$ e seja

$$a = x - y.$$

Então $a \in P$ ou $-a \in P$.
Se $a = x - y \in P$ então $y \leq x$.
Se $-a = -(x - y) = -x + y = y - x \in P$ então $x \leq y$.
Logo, $y \leq x$ ou $x \leq y$. □

Proposição 3.2. *Seja K um corpo ordenado. Para todo $x \in K$ tem-se*

$$x^2 \geq 0.$$

Além disso, se $x^2 = 0$ então $x = 0$.
Em particular, $1 > 0$.

Demonstração. Seja $x \in K$. Então $x \geq 0$ ou $-x \geq 0$.

- Se $x \geq 0$ então $x^2 = x \cdot x \geq 0$.
- Se $-x \geq 0$ então $x^2 = (-x) \cdot (-x) \geq 0$.

Logo $x^2 \geq 0$ para todo $x \in K$.
Já sabemos que se $x^2 = x \cdot x = 0$ então $x = 0$. Como $1 \neq 0$, $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$, logo $1 > 0$. $\square$

Exemplo 3.1. $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Exemplo 3.2. $\mathbb{Z}_2$ não possui nenhuma relação de ordem compatível com as operações algébricas, ou seja, não é um corpo ordenado.
De fato, num corpo ordenado, $1 > 0$. Logo, pela compatibilidade da ordem com a adição, $1 + 1 \geq 1 + 0$, então em $\mathbb{Z}_2$, $0 \geq 1$, contradição.

Observação 3.1. Se $x, y \geq 0$ e $x + y = 0$, então $x = 0$ e $y = 0$.
De fato, se $x + y = 0$ então $y = -x$. Como $x \geq 0$ e $-x = y \geq 0$, tem-se $x = 0$ e daí, $y = 0$.

Definição 3.1. Dado $x \in K$, para $n \in \mathbb{N}$ definimos $n \cdot x$ por indução:

$$0 \cdot x = 0$$

$$(n+1) \cdot x = n \cdot x + x$$

Informalmente, se $n \geq 1$,

$$n \cdot x = \underbrace{x + ... + x}_{n \text{ vezes}}$$

Similarmente, se $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, definimos x^n por indução:

$$x^0 = 1$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

Informalmente, se $n \geq 1$,

$$x^n = \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ vezes}}$$

Se $x = 0$, $0^n = 0$ para todo $n \geq 1$.

Podemos estender as definições acima para números inteiros negativos. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in K$,

$$(-n) \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} -nx$$

(onde $-nx$ é o inverso aditivo de nx).
Similarmente, para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in K$, $x \neq 0$,

$$x^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (x^n)^{-1}$$

(onde $(x^n)^{-1}$ é o inverso multiplicativo de x^n).

Observação 3.2. Seja K um corpo ordenado. Como $0 < 1$ onde neste contexto, 0 é o elemento neutro da adição e 1 é o elemento neutro da multiplicação, temos que:
$0 + 1 < 1 + 1$, então $1 < 2 \cdot 1$
$1 + 1 < 2 \cdot 1 + 1$, então $2 \cdot 1 < 3 \cdot 1$
e etc., por indução,

$$0 < 1 < 2 \cdot 1 < 3 \cdot 1 < \cdots < n \cdot 1 < (n+1) \cdot 1 < \cdots$$

Considere a função $f \colon \mathbb{N} \to K$,

$$f(n) = n \cdot 1.$$

Então claramente f é injetiva: se $n < m$ então $n \cdot 1 < m \cdot 1$, ou seja, $f(n) < f(m)$.
Além disso,

$$f(n+1) = (n+1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 = f(n) + 1,$$

ou seja, o sucessor de n em $\mathbb{N}$ corresponde, via f, a $f(n) + 1$ em K.

Em outras palavras, o conjunto

$$\mathbb{N}' = f(\mathbb{N}) = \{n \cdot 1 : n \in \mathbb{N}\} \subset K$$

é uma cópia em K do conjunto de números naturais $\mathbb{N}$, com uma função sucessor

$$s(n \cdot 1) = n \cdot 1 + 1.$$

Portanto, podemos identificar o conjunto $\mathbb{N}$ com sua cópia em K, e pensar, a partir de agora, em $\mathbb{N}$ como subconjunto de K, onde $n = n \cdot 1$.

Além disso, identificando $-n \in \mathbb{Z}$ com $(-n) \cdot 1 = -n \cdot 1 \in K$, temos que

$$\mathbb{Z} \subset K.$$

Ademais, a função $f \colon \mathbb{Q} \to K$,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m \cdot n^{-1}$$

é bem definida, injetiva e preserva as operações algébricas e de ordem.

■ Ser bem definida significa o seguinte:

$$\text{se } \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \text{ então } m \cdot n^{-1} = p \cdot q^{-1}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} = \frac{p}{q} &\Rightarrow m \cdot q = n \cdot p \\
&\Rightarrow m \cdot q \cdot q^{-1} = n \cdot p \cdot q^{-1} \\
&\Rightarrow m = n \cdot p \cdot q^{-1} \\
&\Rightarrow m \cdot n^{-1} = n^{-1} \cdot n \cdot p \cdot q^{-1} \\
&\Rightarrow m \cdot n^{-1} = p \cdot q^{-1}.
\end{aligned}$$

■ Preservar a adição significa: a imagem pela função f de uma soma de números racionais é a soma das suas imagens, ou seja,

$$f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Similarmente para produto,

$$f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$$

■ Finalmente, preservar a relação de ordem significa: qualquer desigualdade em $\mathbb{Q}$, via f leva à mesma em K, ou seja, Se $\frac{m}{n} \le \frac{p}{q}$ então $f(\frac{m}{n}) \le f(\frac{p}{q})$.

Deixamos a verificação dessas afirmações como exercícios.

Em conclusão, o conjunto

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}' = f(\mathbb{Q}) &= \left\{ f\left(\frac{m}{n}\right) : \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \right\} \\
&= \{m \cdot n^{-1} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}
\end{aligned}$$

é uma cópia (ou uma imagem espelhada) de $\mathbb{Q}$ em K, no sentido de que o conjunto $\mathbb{Q}'$ está em bijeção com $\mathbb{Q}$, uma bijeção que preserva a estrutura algébrica e de ordem.

Portanto, podemos identificar $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}'$, ou seja, $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, e a partir de agora pensamos em $\mathbb{Q}$ como um subconjunto de K.

Em conclusão, se K é um corpo ordenado, então

$$\mathbb{Q} \subset K.$$

Teorema 3.3. *(a desigualdade de Bernoulli) Seja K um corpo ordenado. Então para todo $x \in K$ com $x > -1$, e para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração. Usamos indução em n.

- $n = 0$. Neste caso, $(1+x)^0 = 1$ e $1 + 0 \cdot x = 1 + 0 = 1$.
  Como $1 \geq 1$, a desigualdade vale.
- $n \to n+1$. Temos que

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &\geq (1+nx) \cdot (1+x) \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

  porque $nx^2 \geq 0$.
  Pelo princípio da indução, a desigualdade de Bernoulli vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ☐

4. Intervalos

Seja K um corpo ordenado. Dados $a, b \in K$, definimos os intervalos limitados (fechados, semi-fechados, abertos):

$$\begin{aligned}[a,b] &= \{x \in K : a \leq x \leq b\} \\ [a,b) &= \{x \in K : a \leq x < b\} \\ (a,b] &= \{x \in K : a < x \leq b\} \\ (a,b) &= \{x \in K : a < x < b\}.\end{aligned}$$

Além disso, para $a \in K$, definimos os intervalos ilimitados:

$$\begin{aligned}[a,\infty) &= \{x \in K : x \geq a\} \\ (a,\infty) &= \{x \in K : x > a\} \\ (-\infty,a] &= \{x \in K : x \leq a\} \\ (-\infty,a) &= \{x \in K : x < a\}.\end{aligned}$$

Observe que a interseção de dois intervalos é sempre um intervalo.

Além disso, se I é um intervalo qualquer e $x, y \in I$ com $x < y$, então para todo $z \in K$ com $x < z < y$ tem-se $z \in I$.

Em particular, como

$$x < \frac{x+y}{2} < y,$$

tem-se $\frac{x+y}{2} \in I$.

Na verdade, a propriedade acima caracteriza intervalos: se I é um subconjunto de K tal que:

$$x, y \in I \text{ e } x < z < y \implies z \in I$$

então I é um intervalo.

4.1. **O valor absoluto.** Seja K um corpo ordenado. Dado $x \in K$, definimos seu valor absoluto (ou módulo) como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, $|7| = 7$, já que $7 \geq 0$ e $|-7| = -(-7) = 7$, já que $-7 < 0$.

Claramente,

$$|x| \geq 0 \text{ para todo } x \in K$$

e se $|x| = 0$ então $x = 0$.

Além disso,

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Isto vale porque $|x| = x$ ou $-x$, dependendo de qual é não-negativo, então de qual é maior.

Em particular,

$$x \leq |x| \ \text{ e } -x \leq |x|,$$

logo,

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Observe também (exercício) que

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Lema 4.1. *Seja $a \in K$, $a \geq 0$. Então*

$$|x| \leq a \text{ sse } x \in [-a, a].$$

Similarmente,

$$|x| < a \text{ sse } x \in (-a, a).$$

Demonstração. Como $|x| = \max\{x, -x\}$, temos que

$$|x| \leq a \ \text{ sse } \ x \leq a \text{ e} - x \leq a.$$

Mas

$$-x \leq a \iff -a \leq x.$$

Logo,

$$|x| \leq a \text{ sse } x \leq a \text{ e } -a \leq x,$$

ou seja, sse $x \in [-a, a]$. $\square$

Como consequência deste lema, note que dados $c \in K$ e $r > 0$,

$$|x - c| < r \iff x \in (c - r, c + r).$$

De fato,

$$\begin{aligned} |x - c| < r &\iff -r < x - c < r \\ &\iff -r + c < x < r + c \\ &\iff x \in (c - r, c + r). \end{aligned}$$

Teorema 4.2 (Desigualdade triangular)**.** *Seja K um corpo ordenado. Para todo $x, y \in K$ tem-se*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração. Consideremos dois casos: $x + y \geq 0$ ou $x + y < 0$.

- Se $x + y \geq 0$ então $|x + y| = x + y$. Como vimos, $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$. Logo,

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

- Se $x + y < 0$ então
$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y).$$
Como vimos, $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$. Logo,
$$|x + y| = -x + (-y) \leq |x| + |y|.$$

$\square$

Corolário 4.3. *Para todo $x, y \in K$,*
$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Demonstração. Escrevemos
$x = (x - y) + y$, e pela desigualdade triangular aplicada a $(x - y)$ e y,
$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$
$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$.

Similarmente, $y = (y - x) + x$
$\Rightarrow |y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|$
$\Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.

Como
$$||x| - |y|| = |x| - |y| \text{ ou } ||x| - |y|| = |y| - |x|,$$
a conclusão segue. $\square$

5. Corpos arquimedianos

O corpo de números racionais $\mathbb{Q}$ possui a seguinte propriedade: para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > r.$$

De fato, se $r \leq 0$ então $1 > r$, enquanto se $r > 0$,
$$r = \frac{m}{n} \text{ com } m, n \geq 1.$$

Neste caso, claramente
$$n \geq \frac{n}{m} = r.$$

Mais geralmente, temos a seguinte definição.

Definição 5.1. Um corpo ordenado K se chama arquimediano se para todo $x \in K$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$n > x.$$

Portanto $\mathbb{Q}$ é arquimediano.

Lema 5.1. *Se K é um corpo arquimediano então para todo $a, b \in K$ com $a, b > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*
$$n \cdot a > b.$$

Em outras palavras, dados $a > 0$ possivelmente muito pequeno, e b possivelmente muito grande, existe um inteiro n suficientemente grande que
$$\underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ vezes}} = na > b.$$

Demonstração. Seja $x = b \cdot a^{-1}$. Como K é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} &n > x \\ &\Rightarrow n > b \cdot a^{-1} \\ &\Rightarrow na > b \cdot a^{-1} \cdot a \\ &\Rightarrow na > b. \end{aligned}$$

□

6. Os números racionais não são suficientes

Pelo teorema de Pitágoras, o comprimento x da diagonal de um quadrado com lados de comprimento 1 satisfaz a equação

$$x^2 = 1^2 + 1^2,$$

ou seja,

$$x^2 = 2.$$

Proposição 6.1. *Não existe nenhum número racional x tal que $x^2 = 2$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista um número racional x tal que $x^2 = 2$.

Representemos x como um quociente $\frac{m}{n}$ completamente reduzido, isto é, tal que m, n não tenham nenhum divisor comum. Então

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m}{n}\right)^2 = x^2 = 2 \\ &\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \\ &\Rightarrow m^2 = 2n^2. \end{aligned}$$

Como $2n^2$ é um número par, m^2 também é par, logo m deve ser par (se m fosse ímpar, então $m^2 = m \cdot m$ seria ímpar também).

Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} &m = 2k \\ &\Rightarrow m^2 = 4k^2. \end{aligned}$$

Mas $m^2 = 2n^2$, então

$$\begin{aligned} &4k^2 = 2n^2 \\ &\Rightarrow 2k^2 = n^2 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ é par} \\ &\Rightarrow n \text{ é par.} \end{aligned}$$

Portanto m e n são ambos números pares, então são divisíveis por 2, uma contradição com o fato de não terem nenhum divisor comun. □

Isso mostra que o conjunto de números racionais não é suficiente nem para medir quantidades físicas simples, como a diagonal de um quadrado (ou a área de um círculo e etc.). Portanto precisamos ampliar significativamente esse conjunto, ou seja, considerar o conjunto dos números reais.