CAPÍTULO 4. NÚMEROS REAIS

Intuitivamente, um número real é uma sequência infinita de dígitos, por exemplo

$$1,414213562737...$$

que representa $\sqrt{2}$,

ou

$$3,141592653...$$

que representa π,

ou

$$2,71828...$$

que representa o número e, e etc.

Os racionais são incluídos, por exemplo

$$\frac{1}{2} = 0,5000...$$

$$\frac{4}{3} = 1,333...$$

Vamos definir $\mathbb{R}$, o conjunto de números reais, de uma maneira abstrata, como um *corpo ordenado completo.*

Lembre-se que todo corpo ordenado contém $\mathbb{Q}$ como subconjunto, então

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Definição 0.1. Um corpo ordenado K se chama completo se todo subconjunto limitado superiormente possui um supremo.

Proposição 0.1. *Num corpo ordenado completo todo conjunto limitado inferiormente possui ínfimo.*

Demonstração. Sejam K um corpo ordenado completo e $X \subset K$ um subconjunto limitado inferiormente, isto é, seja $b \in K$ tal que

$$b \leq x \text{ para todo } x \in X.$$

Então o conjunto

$$-X = \{-x : x \in K\}$$

é limitado superiormente por $-b$, já que

$$-x \leq -b \text{ para todo } x \in X.$$

Como K é completo, existe $\sup(-X)$. Seja

$$b := -\sup(-X), \text{ então } \sup(-X) = -b$$

Vamos mostrar que b é o ínfimo de X. De fato, como

$$-x \leq -b \quad \forall x \in X,$$

tem-se

$$b \leq x \quad \forall x \in X,$$

logo b é uma cota inferior de X.

Se $c \in K$ é qualquer cota inferior de X, então

$$c \leq x \text{ para todo } x \in X$$

$$\begin{gathered}\Rightarrow -x \leq -c \text{ para todo } x \in X \\ \Rightarrow -c \text{ é cota superior de } -X \\ \Rightarrow -c \geq -b,\end{gathered}$$

já que $-b$, como supremo de $-X$, é a menor cota superior de $-X$.

Então $c \leq b$, portanto b é a maior cota inferior de X, ou seja, $b = \inf X$. □

Proposição 0.2. *Todo corpo ordenado completo K é arquimediano, isto é, para todo $x \in K$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista $x \in K$ tal que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathbb{N}$ é limitado superiormente por este elemento x.

Como K é completo, existe o supremo de $\mathbb{N}$, seja ele b.

Como $b - 1 < b$, segue que $b - 1$ não é uma cota superior de $\mathbb{N}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > b - 1.$$

Logo $k + 1 \in \mathbb{N}$ e $k + 1 > b$, contradição com o fato de b ser o supremo, então uma cota superior de $\mathbb{N}$. □

Acontece que existe um corpo completo ordenado. Além disso, se K e K' são dois corpos ordenados completos, então existe uma bijeção $f\colon K \to K'$ que preserva a estrutura algébrica e de ordem, no sentido que para todo $x, y \in K$,

$$\begin{gathered}f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ \text{se } x \leq y \text{ então } f(x) \leq f(y).\end{gathered}$$

Portanto K' é uma cópia (ou imagem espelhada) de K, em outras palavras, podemos identificar K' com K.

Em conclusão (via esta identificação) existe um único corpo ordenado completo, denotado por $\mathbb{R}$ e chamado de corpo dos números reais.

Portanto $\mathbb{R}$ é arquimediano e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposição: Existe um único número $b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$, tal que $b^2 = 2$.

Chamamos este único número de $\sqrt{2}$.

Demonstração. Seja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}.$$

Então A é claramente limitado superiormente porque se $c^2 > 2$ (por exemplo se $c = 2$) então
$c^2 > x^2$ para todo $x \in A$
$\Rightarrow c > x$ para todo $x \in A$
$\Rightarrow c$ é uma cota superior de A.

Como $\mathbb{R}$ é completo, A possui um supremo. Seja $b = \sup A$.

Vamos mostrar que $b^2 = 2$.

- Se $b^2 < 2$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b + \varepsilon)^2 < 2$.

De fato, dado um $\varepsilon > 0$ (a ser escolhido em breve),

$$\begin{aligned}(b+\varepsilon)^2 &= b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &< b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &= b^2 + \varepsilon(2b+1) < 2,\end{aligned}$$

se

$$\varepsilon < \frac{2-b^2}{2b+1}.$$

Observe que $\frac{2-b^2}{2b+1} > 0$, já que $b^2 < 2$.

Então escolhido $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < 1 \ \text{ e } \ \varepsilon < \frac{b^2-2}{2b+1},$$

temos que

$$(b+\varepsilon)^2 < 2,$$

ou seja, $b + \varepsilon \in A$.

Mas $b + \varepsilon > b$, então b não pode ser uma cota superior de A.

Isso mostra que a desigualdade $b^2 < 2$ não é possível.

- Se $b^2 > 2$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(b-\varepsilon)^2 > 2.$$

De fato, dado um $\varepsilon > 0$ (a ser escolhido em breve),

$$\begin{aligned}(b-\varepsilon)^2 &= b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &> b^2 - 2b\varepsilon > 2,\end{aligned}$$

se

$$\varepsilon < \frac{b^2-2}{2b}.$$

Então escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \frac{b^2-2}{2b} \text{ (o que é possível porque } b^2 - 2 > 0)$$

temos que $(b-\varepsilon)^2 > 2$ e, em particular, $b - \varepsilon > x$ para todo $x \in A$, logo $b - \varepsilon$ é uma cota superior de A.

Mas $b - \varepsilon < b$, então b não pode ser o supremo de A (ou seja, a menor cota superior).

Portanto, este caso em que $b^2 < 2$ também é impossível.

A única opção possível é que $b^2 = 2$. Então existe um número positivo b tal que $b^2 = 2$.

Vamos provar que ele é único. Se $c > 0$, $c^2 = 2$
então $b^2 = c^2 \Rightarrow (b-c)(b+c) = 0$
$\Rightarrow b - c = 0$ ou $b + c = 0$
$\Rightarrow b = c$ ou $b = -c$ (esse segundo caso é impossível, $b > 0$ e $c > 0$).
Logo $b = c$, ou seja, provamos também a unicidade. $\square$

Observação 0.1. Um argumento similar (mas um pouco mais técnico) mostra que dado qualquer número $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe um único $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ t.q.

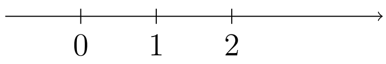
$$x^n = a.$$

Denotamos este número por $\sqrt[n]{a}$ (a raíz de ordem n de a).

Observação 0.2. Lembre-se que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, isto é, todo número racional é real. Chamamos números reais que não são racionais de números irracionais. Por exemplo $\sqrt{2}$ é irracional, como já vimos.

Similarmente, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, e etc são números irracionais.

Representamos o conjunto de números reais por uma reta, chamada a reta real.



Definição 0.2. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Teorema 0.1. *O conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Além disso, o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de números irracionais também é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

Então $b - a > 0$, e como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(b-a) > 1$$
$$\Rightarrow nb > na + 1.$$

Usando de novo o fato de que $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > na$$

.

Seja

$$S = \{k \in \mathbb{N} : k > na\}.$$

Então $S \subset \mathbb{N}$ e S não é vazio. Pelo princípio da boa ordenação, existe $\min S = m$.

Então $m \in S$, logo $m > na$, mas $m - 1 \notin S$, logo

$$m - 1 \leq na$$
$$\Rightarrow m \leq na + 1 < nb$$

Portanto $na \leq m \leq nb$, e daí,

$$a < \frac{m}{n} < b,$$

provando a primeira afirmação, já que $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Vamos provar a segunda afirmação. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$.

Então $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$, e pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (já provada acima), existem $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ tal que

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow a < \frac{m}{n}\sqrt{2} < b.$$

Temos que

$$\frac{m}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Caso contrário, se $\frac{m}{n}\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, então

$$\sqrt{2} = \frac{pn}{qm}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \text{ contradição.}$$

Logo $\frac{m}{n}\sqrt{2}$ é irracional e está entre a e b. $\square$