CAPÍTULO 7. ELEMENTOS DE TOPOLOGIA NA RETA REAL

Sumário

1. Conjuntos abertos 1
2. Conjuntos fechados 5
3. Pontos de acumulação 7
4. Conjuntos compactos 8

Topologia é uma disciplina matemática que estuda conceitos de proximidade, estabilidade, convergência, continuidade e etc.

1. Conjuntos abertos

Intuitivamente, uma propriedade que se refere aos números reais é aberta se ela é estável (ou seja, se ela permanece válida) sob pequenas perturbações.

Por exemplo, a propriedade

$$x > 7$$

é aberta, já que uma pequena perturbação de x, ou seja, $x + \varepsilon$ e $x - \varepsilon$ ainda serão maiores do que 7 (se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno).

Por outro lado, a propriedade

$$x \geq 7$$

não é aberta, já que $7 \geq 7$ mas para todo $\varepsilon > 0$, $7 - \varepsilon < 7$.

Além disso, intuitivamente, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aberto se ele é definido por uma propriedade aberta.

Formalmente definimos o conceito de conjunto aberto como segue.

Definição 1.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é aberto se para todo ponto $x \in X$ existe um intervalo aberto (a, b) tal que

$$x \in (a, b) \quad \text{e} \quad (a, b) \subset X.$$

É fácil verificar que X é aberto sse para todo $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X.$$

Exemplo 1.1. O intervalo $(7, \infty)$ é um conjunto aberto.

O intervalo $[7, \infty)$ não é um conjunto aberto.

Todo intervalo aberto é um conjunto aberto (intervalos não abertos — fechados ou semi-abertos — não são conjuntos abertos).

Exemplo 1.2. $(2, 3) \cup (7, 10)$ é claramente um conjunto aberto.

Teorema 1.3. *(1) $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos abertos.*

(2) Se X e Y são abertos, então $X \cap Y$ é aberto.

(3) Se $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma coleção qualquer de conjuntos abertos, então

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$$

é um conjunto aberto.

Demonstração. A primeira afirmação é evidente.

(2) Sejam X, Y abertos. Se $a \in X \cap Y$, então $a \in X$ e $a \in Y$.

Como X é aberto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset X.$$

Como Y é aberto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subset Y.$$

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, então $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon \leq \varepsilon_2$.

Logo,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset X$$

e

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subset Y,$$

portanto

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X \cap Y,$$

mostrando que $X \cap Y$ é aberto.

(3) Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de abertos e seja $a \in \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Então existe $\alpha_0 \in A$ tal que $a \in X_{\alpha_0}$. Como X_{α_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X_{\alpha_0}.$$

Mas $X_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, logo

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

□

Observação. Por indução é fácil provar que se

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

são abertos, então $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$ é aberto.

Porém, a interseção de uma família infinita de conjuntos abertos pode não ser aberta.

Por exemplo, definindo

$$I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

temos

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{0\}.$$

Os intervalos I_n são abertos, mas a interseção $\{0\}$ não é.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Chamamos a de *ponto interior* de X se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X.$$

Denotamos por $\operatorname{int}(X)$ o conjunto de pontos interiores de X.

Observe que $\operatorname{int}(X) \subset X$. Além disso, $\operatorname{int}(X)$ é um conjunto aberto.

Ademais, X é aberto sse $\operatorname{int}(X) = X$.

Exemplo 1.4. $\operatorname{int}([5, 6]) = (5, 6)$.

O próximo resultado descreve a estrutura dos conjuntos abertos na reta.

Teorema 1.5. *Todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ pode ser representado como uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

A prova precisa do seguinte resultado técnico.

Lema 1.6. *Se* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in L}$ *é uma família qualquer de intervalos abertos com um ponto comum* p*, isto é,* $p \in I_\alpha$ *para todo* $\alpha \in L$*, então a união*

$$\bigcup_{\alpha\in L} I_\alpha$$

é um intervalo aberto.

Demonstração do lema. Sejam

$$I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha),$$

onde a_α, b_α são os pontos extremos de I_α, não necessariamente finitos (no sentido de que a_α pode ser $-\infty$ e b_α pode ser ∞).

Definimos

$$a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in L\}, \qquad b = \sup\{b_\alpha : \alpha \in L\}.$$

Mostremos que

$$\bigcup_{\alpha\in L} I_\alpha = (a, b).$$

A inclusão $\subset$ é óbvia. De fato, como

$$a \le a_\alpha < b_\alpha \le b \quad \forall \alpha \in L,$$

tem-se

$$I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \subset (a, b) \quad \forall \alpha \in L.$$

Resta provar a inclusão oposta,

$$(a, b) \subset \bigcup_{\alpha\in L} I_\alpha.$$

Seja $x \in (a, b)$. Então $x > a$ e $x < b$.

Como $a = \inf\{a_\alpha : \alpha \in L\}$ e $x > a$, existe $\gamma \in L$ tal que

$$x > a_\gamma.$$

Como $b = \sup\{b_\alpha : \alpha \in L\}$ e $x < b$, existe $\beta \in L$ tal que

$$x < b_\beta.$$

Se $x < b_\gamma$, então $x \in (a_\gamma, b_\gamma)$.

Se $x \ge b_\gamma$, como o ponto comum p satisfaz

$$a_\gamma < p < b_\gamma.$$

e também

$$a_\beta < p < b_\beta,$$

tem-se

$$x \ge b_\gamma > p > a_\beta.$$

Logo $x > a_\beta$ e como $x < b_\beta$, temos

$$x \in (a_\beta, b_\beta) \subset \bigcup_{\alpha\in L} (a_\alpha, b_\alpha)$$

Isso prova o lema. □

Estamos prontos para provar o teorema de estrutura dos abertos.

Demonstração do teorema. Como A é um conjunto aberto, para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A.$$

Logo existem intervalos abertos I tais que

$$x \in I \quad \text{e} \quad I \subset A.$$

Seja I_x a união de todos esses intervalos. Como cada um deles contém o ponto x, pelo lema anterior, I_x é um intervalo aberto.

Consideremos a família de intervalos abertos

$$\{I_x : x \in A\}.$$

Claramente,

$$\bigcup_{x\in A} I_x = A,$$

já que $I_x \subset A$ para todo $x \in A$, e se $x \in A$ então $x \in I_x$.

Observe que, dados $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = \emptyset$ ou $I_x = I_y$.

De fato, se $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, então, como I_x e I_y são intervalos abertos com um ponto comum, a união

$$I = I_x \cup I_y$$

é um intervalo aberto também, pelo lema anterior. Além disso, $I \subset A$.

Mas $x \in I_x \subset I \subset A$, e como I_x é a união de todos os intervalos abertos que contêm x e estão contidos em A, segue que $I = I_x$.

Similarmente, $y \in I_y \subset I \subset A$, então $I = I_y$.

Portanto, $I_x = I_y$.

Resta provar que a família

$$\{I_x : x \in A\}$$

seja enumerável.

Cada intervalo I_x é aberto, então pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe um número racional $r_x \in I_x$.

Como os intervalos $\{I_x : x \in A\}$ são disjuntos (ou iguais), a função

$$f : \{I_x : x \in A\} \to \mathbb{Q}, \qquad f(I_x) = r_x,$$

é injetiva.

Como o contradomínio $\mathbb{Q}$ é enumerável, por um teorema do primeiro capítulo segue que

$$\{I_x : x \in A\} \text{ é enumerável.}$$

□

Corolário 1.7. *Seja I um intervalo aberto. Se $I = A \cup B$, onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos, então ou $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.*

Demonstração. Se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, então ambos podem ser representados como uniões de intervalos abertos disjuntos. Logo

$$I = A \cup B$$

seria uma união disjunta de pelo menos dois intervalos abertos — impossível, pois I é um intervalo aberto também. □

2. Conjuntos fechados

Definição 2.1. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto limite (ou valor de aderência) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se existir uma sequência de pontos $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplo 2.1. O número 0 é um valor de aderência do intervalo $(0, \infty)$ porque

$$\frac{1}{n} \in (0, \infty) \quad \forall n \geq 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Lema 2.2. *Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto limite de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ sse para todo $\varepsilon > 0$ tem-se*

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$:"Como a é um ponto limite de X, existe uma sequência $(x_n)_n \subset X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - a| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Mas $x_n \in X$, então $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X$, mostrando que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

"$\Leftarrow$:"Como para todo $\varepsilon > 0$,

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset,$$

para todo $n \geq 1$, pondo $\varepsilon = \frac{1}{n}$,

$$(a - \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset.$$

Então existe $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \cap X$.
Portanto, para todo $n \geq 1$, $x_n \in X$ e como

$$x_n \in (a - \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{1}{n}),$$

tem-se

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Mas $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, portanto $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. □

Evidentemente, um ponto a é aderente ao conjunto X sse para todo intervalo aberto I contendo a, tem-se

$$I \cap X \neq \emptyset.$$

Corolário 2.3. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, então $\inf X$ é um ponto limite de X. Similarmente, se X é limitado superiormente então $\sup X$ é um ponto limite de X.*

Demonstração. Proveremos a primeira afirmação, a segunda é similar.
Seja $a = \inf X$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.
Por outro lado, $a \leq x$, então $a - \varepsilon \leq x$.
Logo $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, e daí,

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Como $x \in X$, concluímos que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. □

Definição 2.2. O fecho de um conjunto X, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto de todos os pontos limite de X.

Observe que $X \subset \overline{X}$. Além disso, se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Exemplo 2.4. O fecho de um intervalo (a, b) é $[a, b]$.
O fecho de (a, ∞) é $[a, \infty)$.

Definição 2.3. Um conjunto X é fechado se $X = \overline{X}$.

Teorema 2.5. *Um conjunto X é fechado sse dada uma sequência $(x_n)_n \subset X$, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então $a \in X$.*

Demonstração. Se X é fechado, $(x_n)_n \subset X$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então por definição, $a \in \overline{X} = X$, logo $a \in X$, provando a afirmação direta.

Vamos provar a recíproca. Se para toda sequência $(x_n)_n \subset X$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se $a \in X$, concluímos que todo ponto limite de X pertence a X, ou seja,

$$\overline{X} \subset X.$$

Mas $X \subset \overline{X}$, logo $X = \overline{X}$, isto é, X é fechado. □

Exemplo 2.6. O fecho de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$.

De fato, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e se $a \in \mathbb{R}$ então o número a pode ser aproximado por números racionais. De fato, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, para todo $n \geq 1$, o intervalo $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ contém um número racional r_n, logo $|r_n - a| < \frac{1}{n}$.

Então $(r_n)_n \subset \mathbb{Q}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$, mostrando que $a \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Portanto $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$, e daí, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Teorema 2.7. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado sse seu complemento $\mathbb{R} \setminus F$ é aberto.*

Demonstração. "$\Rightarrow$": Suponha que F seja fechado.
Dado $a \in \mathbb{R} \setminus F$, como $F = \overline{F}$, tem-se $a \notin \overline{F}$.
Logo existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \cap F = \emptyset,$$

e daí,

$$(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \setminus F.$$

Portanto $\mathbb{R} \setminus F$ é aberto.

"$\Leftarrow$": Suponha que $\mathbb{R} \setminus F$ seja aberto.
Seja $(x_n)_n \subset F$ uma sequência de pontos em F tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Vamos provar que $a \in F$ (o que vai concluir a prova do teorema, devido ao teorema anterior).
Se $a \notin F$ então $a \in \mathbb{R} \setminus F$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \setminus F.$$

$$\Rightarrow (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \cap F = \emptyset.$$

Mas como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então

$$|x_n - a| < \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0).$$

Por outro lado, $x_n \in F$, então

$$x_n \in (a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0) \cap F,$$

e daí

$$(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0) \cap F = \emptyset,$$

uma contradição. □

Teorema 2.8. *(1) $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são fechados.*

(2) Se $F_1, F_2, \dots, F_n$ são fechados, então $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado.

(3) Se $\{F_\alpha\}_{\alpha \in L}$ são fechados, então

$$\bigcap_{\alpha \in L} F_\alpha \text{ é fechado.}$$

Demonstração. (1) é evidente, já que

$$\emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset.$$

(2) Temos que

$$\mathbb{R} \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n) = (\mathbb{R} \setminus F_1) \cap \cdots \cap (\mathbb{R} \setminus F_n).$$

Como $F_1, \dots, F_n$ são fechados, $\mathbb{R} \setminus F_1, \dots, \mathbb{R} \setminus F_n$ são abertos, então

$$(\mathbb{R} \setminus F_1) \cap \cdots \cap (\mathbb{R} \setminus F_n)$$

é aberto, logo

$$F_1 \cup \cdots \cup F_n,$$

que é o complementar de

$$\mathbb{R} \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n),$$

é fechado.

(3) Argumento similar, exercício. □

3. Pontos de acumulação

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X se

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \text{ contém algum ponto de } X, \text{ distinto de } a.$$

Denotamos por X' o conjunto de pontos de acumulação de X.

Logo,

$$a \in X' \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \text{ tal que } |x-a| < \varepsilon,\ x \neq a.$$

Teorema 3.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então $a \in X'$ se e somente se existe uma sequência de pontos $(x_n)_n \subset X$, diferentes dois a dois, tal que*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja $a \in X'$.

Para $\varepsilon_1 = 1$ existe $x_1 \in X$, $x_1 \neq a$ tal que

$$|x_1 - a| < 1.$$

Seja $\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\right\}$. Então $\varepsilon_2 > 0$ e existe $x_2 \in X$, $x_2 \neq a$ tal que

$$|x_2 - a| < \varepsilon_2.$$

Logo

$$|x_2 - a| < \tfrac{1}{2}$$

e

$$|x_2 - a| < |x_1 - a|,$$

o que em particular implica $x_2 \neq x_1$.

Seja $\varepsilon_3 = \min\left\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\right\}$. Logo $\varepsilon_3 > 0$; então existe $x_3 \neq a$, $x_3 \in X$ tal que

$$|x_3 - a| < \varepsilon_3.$$

Logo

$$|x_3 - a| < \tfrac{1}{3}$$

e

$$|x_3 - a| < |x_2 - a| < |x_1 - a|,$$

o que mostra que $x_3 \neq x_2$, $x_3 \neq x_1$.

Por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$, construímos pontos $x_1, \dots, x_n \in X$, diferentes dois a dois, com

$$|x_n - a| < \tfrac{1}{n}.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, e os pontos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são diferentes dois a dois.

"$\Leftarrow$": Suponha que $(x_n)_n \subset X$ são diferentes dois a dois, e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

Como $(x_n)_n$ são diferentes dois a dois, no máximo um deles é igual a a. Então, claramente existe $n \geq n_\varepsilon$ com $x_n \neq a$ e $|x_n - a| < \varepsilon$.

Como $x_n \in X$, temos

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset,$$

mostrando que $a \in X'$. □

Observação 3.1. $\overline{X'} \subset X$ e $\overline{X} = X \cup X'$.

Logo X é fechado sse $X' \subset X$.

4. Conjuntos compactos

Intuitivamente, em topologia, a compacidade é uma espécie de finitude.

Uma cobertura aberta de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $(D_\alpha)_{\alpha\in L}$ de conjuntos abertos tal que

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in L} D_\alpha.$$

Uma subcobertura é uma subfamília $(D_\alpha)_{\alpha\in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in L'} D_\alpha.$$

A subcobertura é finita se o conjunto L' de índices é finito.

Definição 4.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se toda cobertura aberta dele possui uma subcobertura finita.

Em outras palavras, X é compacto se dados abertos $(D_\alpha)_{\alpha\in L}$ tais que

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in L} D_\alpha,$$

existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ tais que

$$X \subset D_{\alpha_1} \cup \dots \cup D_{\alpha_n}.$$

Exemplo 4.1. Todo conjunto finito é compacto.

Teorema 4.2 (Heine–Borel)**.** *Seja $[a,b]$ um intervalo limitado e fechado. Então $[a,b]$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $\{D_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma cobertura aberta do intervalo $[a,b]$.

Vamos provar que existe uma subcobertura finita. Considere o conjunto

$$X = \{x \in [a,b] : [a,x] \text{ possui uma subcobertura finita}\}.$$

O objetivo é provar que $b \in X$.

Primeiro observe que $a \in X$, então $X \neq \emptyset$. De fato, $[a,a] = \{a\}$, e como $a \in \bigcup_{\alpha\in L} D_\alpha$, existe $\alpha_0 \in L$ tal que $a \in D_{\alpha_0}$. Logo $\{D_{\alpha_0}\}$ é uma subcobertura finita (com um elemento) de $[a,a]$.

Como $X \subset [a,b]$, X é limitado, portanto admite um supremo. Seja $c = \sup X$.

Claramente $c \leq b$. Vamos mostrar que $c = b$.

Suponha por contradição que $c < b$. Como $c \in \bigcup_{\alpha\in L} D_\alpha$, existe $\alpha_0 \in L$ tal que $c \in D_{\alpha_0}$, que é aberto, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0) \subset D_{\alpha_0}.$$

Como $c < b$, podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ pequeno o suficiente que ainda temos $c + \varepsilon_0 < b$.

Por outro lado, $c - \varepsilon_0 < c = \sup X$, logo existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon_0 < x$.

Como $x \in X$, existe uma subcobertura finita de $[a,x]$, ou seja, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ tais que

$$[a,x] \subset D_{\alpha_1} \cup \cdots \cup D_{\alpha_n}.$$

Mas

$$[x, c + \tfrac{\varepsilon_0}{2}] = [a,x] \cup [x, c+\tfrac{\varepsilon_0}{2}] \subset [a,x] \cup (c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0)$$

está contido em

$$D_{\alpha_1} \cup \cdots \cup D_{\alpha_n} \cup D_{\alpha_0},$$

que é uma cobertura finita, logo

$$c + \tfrac{\varepsilon_0}{2} \in X,$$

contradição, pois $c + \frac{\varepsilon_0}{2} > c$ e $c = \sup X$.

Portanto $c = b$, ou seja, $b = \sup X$.

A prova quase acabou, mas resta provar que na verdade $b \in X$. Vamos usar um argumento similar ao anterior.

Como $b \in \bigcup_{\alpha\in L} D_\alpha$, existe $\alpha_0 \in L$ tal que $b \in D_{\alpha_0}$, que é aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset D_{\alpha_0}.$$

Como $b - \varepsilon < b = \sup X$, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Como $x \in X$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ tais que

$$[a,x] \subset D_{\alpha_1} \cup \cdots \cup D_{\alpha_n}.$$

Portanto,

$$[a,b] = [a,x] \cup [x,b] \subset [a,x] \cup (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

está contido em

$$D_{\alpha_1} \cup \cdots \cup D_{\alpha_n} \cup D_{\alpha_0},$$

que é uma cobertura finita.

Concluímos que $b \in X$, então $[a,b]$ possui uma subcobertura finita, provando sua compacidade. $\square$

Lema 4.3. *Sejam $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e $a \in \mathbb{R}$. Se $a \notin K$ então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0) \cap K = \emptyset$. Em outras palavras,*

$$|x - a| \geq \varepsilon_0 \quad \textit{para todo } x \in K.$$

Demonstração. Como $a \notin K$, para todo $x \in K$, $a \neq x$, então $d_x = |a - x| > 0$. Seja $\varepsilon_x = \dfrac{d_x}{3}$.

A família de intervalos abertos

$$\mathcal{G} = \{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)\}_{x \in K}$$

é uma cobertura aberta de K, um compacto. Logo, existe uma subcobertura finita

$$\mathcal{F} = \{(x_1 - \varepsilon_{x_1}, x_1 + \varepsilon_{x_1}), \ldots, (x_n - \varepsilon_{x_n}, x_n + \varepsilon_{x_n})\}.$$

Seja $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$. Então $\varepsilon_0 > 0$.

Vamos provar que $|x - a| \geq \varepsilon_0$ para todo $x \in K$.

Seja $x \in K$. Sendo $\mathcal{F}$ uma cobertura de K, existe um índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$x \in (x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j})$$
$$\Rightarrow |x - x_j| < \varepsilon_{x_j}.$$

Suponha por contradição que

$$|x - a| < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{x_j}$$

(porque ε_0 é o mínimo dos números $\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}$).

Então $|x - x_j| < \varepsilon_{x_j}$, $|x - a| < \varepsilon_{x_j}$, e pela desigualdade triangular,

$$d_{x_j} = |a - x_j| \leq |a - x| + |x - x_j| < \varepsilon_{x_j} + \varepsilon_{x_j} = 2\varepsilon_{x_j} = \frac{2}{3} d_{x_j} < d_{x_j},$$

contradição.

Portanto, $|x - a| \geq \varepsilon_0$. ☐

Teorema 4.4. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.*

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja K um conjunto compacto.

Primeiro provamos que ele é limitado. Claramente

$$K \subset \bigcup_{x \in K} (x - 1, x + 1).$$

Sendo K compacto, K possui uma subcobertura finita, isto é, existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tais que

$$K \subset (x_1 - 1, x_1 + 1) \cup \cdots \cup (x_n - 1, x_n + 1).$$

Sejam $M = \max\{x_1 + 1, \ldots, x_n + 1\}$ e $m = \min\{x_1 - 1, \ldots, x_n - 1\}$.

Se $x \in K$ então existe um índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in (x_j - 1, x_j + 1)$.

Logo,

$$m \leq x_j - 1 < x < x_j + 1 \leq M.$$

Portanto $x \in [m, M]$ para todo $x \in K$, provando que o conjunto K é limitado.

Agora vamos provar que o conjunto K é fechado.

Seja $(x_n)_n \subset K$ uma sequência e suponha que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Vamos provar que $a \in K$. Suponha por contradição que $a \notin K$.

Como K é compacto, pelo lema anterior existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|x - a| \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } x \in K.$$

Mas como $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

o que é uma contradição, já que $x_n \in K$ para todo n.

Portanto $a \in K$, mostrando que o conjunto K é fechado.

"$\Leftarrow$" Suponha que o conjunto K seja fechado e limitado. Vamos provar que ele é compacto. Seja

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$$

uma cobertura aberta de K.

Sendo limitado, existe um intervalo limitado $[a, b]$ tal que

$$K \subset [a, b].$$

Sendo fechado, seu complemento $K^c = \mathbb{R} \setminus K$ é aberto.

Então

$$[a, b] \subset \mathbb{R} = K \cup K^c \subset \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha \cup K^c,$$

ou seja, temos uma cobertura aberta do intervalo fechado e limitado $[a, b]$.

Pelo teorema de Heine–Borel, $[a, b]$ é compacto, então existe uma subcobertura finita, isto é, existem índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$, tais que

$$[a, b] \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup K^c.$$

Mas $K \subset [a, b]$, logo

$$K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup K^c,$$

e como $K \cap K^c = \emptyset$, segue que

$$K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n},$$

ou seja, ele possui uma subcobertura finita, assim provando sua compacidade. □

Exemplo 4.5. Qualquer união finita de intervalos fechados e limitados, por exemplo $[2, 3] \cup [6, 9]$ é um conjunto compacto. Isto é porque uma união finita de conjuntos fechados é fechado, e uma união finita de conjuntos limitados é limitado.

Exemplo 4.6. O conjunto

$$K = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$$

é claramente limitado e também fechado, já que 0 é o único ponto limite de $\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$. Então pelo teorema anterior, K é compacto.

Observe que ele não é um intervalo, nem uma união finita de intervalos.

Teorema 4.7. *Um conjunto K é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência convergente para um elemento de K.*

Demonstração. "$\Rightarrow$" Sejam K um compacto e $(x_n)_n \subset K$ uma sequência. K é limitado, então $(x_n)_n$ é uma sequência limitada. Por um teorema anterior, $(x_n)_n$ possui um valor de aderência, ou seja, uma subsequência convergente $(x_{n_k})_k$.

Seja

$$a = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}.$$

Como $(x_{n_k})_k \subset K$ e K é fechado, o limite $a \in K$.

"$\Leftarrow$" Suponha que toda sequência em K possua uma subsequência convergente em K.

Vamos provar que o conjunto K é compacto. Pelo teorema anterior, isto é equivalente ao provar que é fechado e limitado.

Seja $(x_n)_n \subset K$ uma sequência convergente e seja

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

A sequência $(x_n)_n$ possui uma subsequência convergente com limite um elemento de K.

Mas como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, toda subsequência dela converge para o mesmo ponto a. Logo $a \in K$, mostrando que o conjunto K é fechado.

Suponha por contradição que o conjunto K não seja limitado. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que

$$|x_n| \geq n.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty.$$

Qualquer subsequência de $(x_n)_n$ vai ter a mesma propriedade, então não pode convergir para um número em K, contradição.

Portanto, K é limitado. $\square$

Teorema 4.8. *Um conjunto K é compacto se e somente se, todo conjunto infinito $X \subset K$ tem um ponto de acumulação em K.*

Demonstração. Exercício. $\square$

Corolário 4.9. *Todo conjunto infinito e limitado possui ponto de acumulação.*

Demonstração. Exercício. $\square$