SOLUÇÕES DO PRIMEIRO EXAME

Cada exercício vale 16 pontos, para um total de 80 pontos.

Exercício 1. (i) Defina o conceito de função injetiva.

(ii) Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ duas funções. Mostre que se $g \circ f$ é injetiva então f também é injetiva.

Demonstração. (i) Uma função $f : A \to B$ é injetiva se para todo $x, y \in A$ com $x \neq y$ temos

$$f(x) \neq f(y),$$

ou, equivalentemente, f é injetiva quando $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

(ii) Tem-se $g \circ f : A \to C$. Sejam $x, y \in A$ e suponha que

$$f(x) = f(y).$$

Então

$$g(f(x)) = g(f(y)),$$

logo

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y).$$

Como $g \circ f$ é injetiva, segue que $x = y$. Concluímos que f é injetiva. □

Exercício 2. Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto de números naturais diferentes de 0, e considere o produto cartesiano

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* = \big\{(m, n)\colon m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\big\}.$$

Prove que a relação

$$(m, n) \sim (m', n') \text{ se } m \cdot n' = n \cdot m'$$

é uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Vamos verificar que a relação $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

▪ Claramente $(m, n) \sim (m, n)$, já que $m \cdot n = n \cdot m$ (o produto de números naturais é comutativo). Logo $\sim$ é reflexiva.

▪ Sejam $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
Então $(m, n) \sim (m', n')$ significa $m \cdot n' = n \cdot m'$,
enquanto $(m', n') \sim (m, n)$ significa $m' \cdot n = n' \cdot m$.
Claramente $m \cdot n' = n \cdot m'$ é equivalente a $m' \cdot n = n' \cdot m$ (porque o produto de números naturais é comutativo).
Logo $(m, n) \sim (m', n') \Rightarrow (m', n') \sim (m, n)$, ou seja, $\sim$ é simétrica.

▪ Vamos provar a transitividade. Sejam $(m, n), (m', n'), (m'', n'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, então $n \neq 0$, $n' \neq 0$, $n'' \neq 0$.
Suponha que $(m, n) \sim (m', n')$ e $(m', n') \sim (m'', n'')$.
Então

$$m \cdot n' = n \cdot m' \tag{1}$$

$$m' \cdot n'' = n' \cdot m'' \,. \tag{2}$$

Multiplicando as duas identidades acima tem-se:

$$(m \cdot n') \cdot (m' \cdot n'') = (n \cdot m') \cdot (n' \cdot m'').$$

Usando as propriedades básicas da multiplicação (associatividade, comutatividade), temos:

$$m \cdot n'' \cdot m' \cdot n' = n \cdot m'' \cdot m' \cdot n'.$$

Dividindo os dois lados por $n' \neq 0$, tem-se

$$(m \cdot n'') \cdot m' = (n \cdot m'') \cdot m'$$

Temos dois casos.

1) Se $m' \neq 0$ então dividendo por m' temos que $m \cdot n'' = n \cdot m''$.

2) Se $m' = 0$, então equação (1) implica $m \cdot n' = 0$, logo $m = 0$ (porque $n' \neq 0$).
Similarmente, equação (2) implica $n' \cdot m'' = 0$, logo $m'' = 0$ (porque $n' \neq 0$).

Portanto, $m \cdot n'' = 0 \cdot n'' = 0$ e $n \cdot m'' = n \cdot 0 = 0$, logo $m \cdot n'' = n \cdot m''$.

Em ambos casos provamos que $m \cdot n'' = n \cdot m''$, assim mostrando que $(m, n) \sim (m'', n'')$. □

Exercício 3. (i) Defina o conceito de conjunto finito.

(ii) Sejam X, Y dois conjuntos finitos. Prove que o produto cartesiano $X \times Y$ também é finito e

$$\text{card } (X \times Y) = \text{card } X \cdot \text{card } Y.$$

Demonstração. (i) Um conjunto X é finito se $X = \emptyset$ ou existem $n \geq 1$ e $\varphi : I_n \to X$ bijetiva, onde $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Sejam $n = \text{card } Y$, $m = \text{card } X$, $m, n \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução em n que

$$\text{card } (X \times Y) = m \cdot n.$$

- 1º Passo: $n = 0$. Neste caso $Y = \emptyset$, então claramente $X \times Y = \emptyset$ e

$$\text{card}(X \times Y) = 0 = m \cdot 0.$$

- Passo indutivo: suponha que se Y é um conjunto (qualquer) com card $Y = n$ então

$$\text{card}(X \times Y) = m \cdot n.$$

Seja Z um conjunto com card $Z = n + 1$. Então $Z = \{z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}\}$.
Seja $Y = \{z_1, \ldots, z_n\}$.
Então card $Y = n$ e $Z = Y \cup \{z_{n+1}\}$.

Pela hipótese de indução, card $(X \times Y) = m \cdot n$.
Além disso, claramente $\varphi : X \to X \times \{z_{n+1}\}$, $\varphi(x) = (x, z_{n+1})$ é bijetiva, então

$$\text{card } (X \times \{z_{n+1}\}) = \text{card } X = m.$$

Ademais,

$$\begin{aligned} X \times Z &= X \times (Y \cup \{z_{n+1}\}) \\ &= (X \times Y) \cup (X \times \{z_{n+1}\}). \end{aligned}$$

Os conjuntos $X \times Y$ e $X \times \{z_{n+1}\}$ são disjuntos, então

$$\begin{aligned} \text{card } (X \times Z) &= \text{card } (X \times Y) + \text{card } (X \times \{z_{n+1}\}) \\ &= m \cdot n + m \\ &= m(n+1), \end{aligned}$$

provando a propriedade para conjuntos com $n + 1$ elementos.

Pelo princípio da indução,

$$\text{card}(X \times Y) = m \cdot n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exercício 4. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ onde $m \neq 0$. Prove que existem $q, r \in \mathbb{N}$ com $r < m$ tais que

$$n = m \cdot q + r.$$

Demonstração. Fixe $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$. Vamos usar indução em n.

- 1^o passo: $n = 0$. Claramente

$$0 = m \cdot 0 + 0,$$

então o resultado vale com $q = 0$ e $r = 0 < m$.

- Passo indutivo: Suponha que

$$n = m \cdot q + r$$

onde $q, r \in \mathbb{N}$ e $r < m$. Então

$$n + 1 = m \cdot q + (r + 1).$$

Temos dois casos.
1) Se $r + 1 < m$ então a afirmação vale para $n + 1$ com o mesmo q e $r + 1$.

2) Se $r + 1 \geq m$ então necessariamente $r + 1 = m$ (porque $r < m$, então $r + 1 \leq m$).
Neste caso

$$n + 1 = m \cdot q + m = m(q + 1) + 0$$

então a afirmação vale para $n + 1$ com $q + 1$ e 0.
Pelo princípio da indução, a afirmação vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exercício 5. Prove que para todo $n \geq 1$,

$$6\,(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = n(n + 1)(2n + 1).$$

Demonstração. Vamos usar indução em $n \geq 1$ para provar a fórmula

$$6 \cdot (1^2 + \cdots + n^2) = n(n + 1)(2n + 1).$$

- 1^o passo: $n = 1$. A fórmula se torna

$$6 \cdot 1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

que é verdadeira.

- Passo indutivo: Suponha que a fórmula valha para n, ou seja,

$$6(1^2 + \cdots + n^2) = n(n + 1)(2n + 1).$$

Então

$$\begin{aligned} 6(1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2) &= 6(1^2 + \cdots + n^2) + 6(n + 1)^2 \\ \text{(pela hipótese indutiva)} \quad &= n(n + 1)(2n + 1) + 6\,(n + 1)^2 \\ &= (n + 1)(2n^2 + n + 6n + 6) \\ &= (n + 1)(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (n + 1)(n + 2)(2(n + 1) + 1) &= (n + 1)(n + 2)(2n + 3) \\ &= (n + 1)(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Portanto

$$6(1^2 + \cdots + n^2 + (n + 1)^2) = (n + 1)(n + 2)(2n + 3),$$

assim provando a fórmula para $n + 1$.
Pelo princípio da indução, a fórmula vale para todo $n \geq 1$. □

Exercício 6. Seja X um conjunto finito com n elementos, onde $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\mathcal{P}(X)$, o conjunto de todos os subconjuntos de X tem 2^n elementos.

Demonstração. Usamos indução matemática para provar que:
se $\text{card}\, X = n$ então $\text{card}\, \mathcal{P}(X) = 2^n$.

- 1^{o} passo: $n = 0$. Neste caso $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ e
$$\text{card}\, \mathcal{P}(X) = 1 = 2^0.$$

- Passo indutivo: suponha que dado *qualquer* conjunto X com $\text{card}\, X = n$, tem-se $\text{card}\, \mathcal{P}(X) = 2^n$.

Seja Y um conjunto com $\text{card}\, Y = n + 1$, então
$$Y = \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}.$$

Seja $X = \{y_1, \dots, y_n\}$, então $\text{card}\, X = n$ e $Y = X \cup \{y_{n+1}\}$.

Dado um subconjunto $A \subset Y$, ou A não contém y_{n+1}, e neste caso $A \subset X$, ou $y_{n+1} \in A$, e neste caso $A = A' \cup \{y_{n+1}\}$, onde
$$A' = A \setminus \{y_{n+1}\} \subset X.$$

Portanto
$$\mathcal{P}(Y) = \{A : A \subset X\} \cup \{A' \cup \{y_{n+1}\} : A' \subset X\}.$$

O conjunto $\{A : A \subset X\} = \mathcal{P}(X)$ tem cardinalidade 2^n pela hipótese indutiva.

Além disso, como a função $\varphi : \{A' : A' \subset X\} \to \{A' \cup \{y_{n+1}\} : A' \subset X\}$,
$$\varphi(A') = A' \cup \{y_{n+1}\}$$
é claramente bijetiva, temos que
$$\text{card}\, \{A' \cup \{y_{n+1}\} : A' \subset X\} = \text{card}\, \{A' : A' \subset X\} = \text{card}\, \mathcal{P}(X) = 2^n.$$

Concluímos que
$$\text{card}\, \mathcal{P}(Y) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Pelo princípio da indução, a conclusão segue. □