SOLUÇÕES DO TERCEIRO EXAME

Número total de pontos: 80.

Exercício 1. (i) Defina o conceito de limite ∞ para uma sequência de números reais.

(ii) Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

(iii) Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{|x_n|} = \infty$.

Demonstração. (i) Seja $(x_n)_n$ uma sequência de números reais. Dizemos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

quando para todo $A > 0$ existe $n_A \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq n_A \text{ então } x_n \geq A.$$

(ii) Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ e defina $A = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$. Então existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_\varepsilon$ temos

$$x_n > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Em particular $x_n > 0$, então também temos

$$\frac{1}{x_n} < \varepsilon.$$

Como $x_n > 0$, tem-se $\dfrac{1}{x_n} > 0$, então

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{x_n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Seja $A > 0$ e defina $\varepsilon = \dfrac{1}{A} > 0$. Então existe $n_A \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq n_A \text{ temos } |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{A}$$

e daí,

$$\frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} = \infty.$$

□

Exercício 2. (i) Defina o conceito de série convergente.

(ii) Prove que para todo $r \in (-1,1)$, a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{n-2}$$

é convergente.

(iii) Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

é convergente e calcule sua soma.

Demonstração. (i) Uma série de números reais

$$\sum_{n\geq 1} x_n$$

é convergente se a sequência de somas parciais

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n$$

é convergente. Nesse caso, definimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

(ii) Seja $a_n = n^2 r^{n-2}$, $n \geq 2$. Logo

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2\, |r|^{\,n-1}}{n^2\, |r|^{\,n-2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |r| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 |r|.$$

Claramente

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1,$$

portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \cdot |r| = |r| < 1$$

se $r \in (-1,1)$.

Pelo teste da razão, concluímos que a série

$$\sum_{n\geq 2} n^2 r^{n-2}$$

é convergente (na verdade, absolutamente convergente) para todo $r \in (-1,1)$.

(iii) Escrevemos a série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}\cdot 3} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^{m}$$

(onde denotamos $m = n-1$, então se $n \geq 1$, tem-se $m = n-1 \geq 0$).

Como $\frac{2}{3} < 1$, a série geométrica $\displaystyle\sum_{m\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^m$ é convergente e sua soma é $\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.

Portanto a nossa série converge e sua soma é $\dfrac{1}{3}\cdot 3 = 1$. □

Exercício 3. (i) Defina o conceito de conjunto aberto.

(ii) Defina o conceito de conjunto fechado.

(iii) Prove que se U é aberto e F é fechado então $U \setminus F$ é aberto.

Demonstração. (i) Um conjunto $U \subset \mathbb{R}$ é aberto se para todo $a \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U.$$

(ii) Um conjunto F é fechado se seu fecho $\overline{F} = F$.
Em outras palavras, F é fechado quando se $(x_n)_n \subset F$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ então $a \in F$.

(iii) Um conjunto F é fechado sse seu conjunto complementar é aberto.
Então F^c é aberto. Mas

$$U \setminus F = U \cap F^c$$

e como a interseção de dois conjuntos abertos é um aberto, concluímos que

$$U \setminus F = U \cap F^c \text{ é aberto.}$$

□

Exercício 4. (i) Defina o conceito de conjunto compacto.

(ii) Enuncie duas afirmações equivalentes ao conceito de compacidade (ou seja, dois teoremas do tipo: "Um conjunto é compacto se, e somente se, ...").

(iii) Prove que se K é um conjunto compacto e F é um conjunto fechado, então $K \cap F$ é compacto.

(iv) Defina o conceito de ponto de acumulação de um conjunto.

(v) Prove que se K é um conjunto compacto e infinito, então ele possui um ponto de acumulação em K.

Demonstração. (i) Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se toda cobertura aberta dele possui uma subcobertura finita, ou seja, se

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in L} D_\alpha,$$

onde D_α são abertos, então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ tais que

$$K \subset D_{\alpha_1} \cup \cdots \cup D_{\alpha_n}.$$

(ii) Um conjunto K é compacto sse K é fechado e limitado.

Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto sse toda sequência $(x_n)_n \subset K$ possui uma subsequência convergente em K.

(iii) Se K é compacto então é limitado e fechado.
Mas $K \cap F \subset K$, logo $K \cap F$ é limitado.
Além disso, interseção de dois fechados é um fechado, logo $K \cap F$ é fechado.
Portanto $K \cap F$ é fechado e limitado, consequentemente ele é compacto.

(iv) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$. Então a é um ponto de acumulação de X se para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que

$$x \neq a \quad \text{e} \quad |x-a| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X$$

contém pelo menos um elemento diferente de a.

(v) Seja K um conjunto compacto e infinito.

Sendo infinito, existe uma sequência infinita

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

de elementos (diferentes dois a dois) de K.

Como K é compacto, a sequência $(x_n)_n \subset K$ contém uma subsequência $(x_{n_k})_k$ convergente para um ponto $a \in K$. Vamos mostrar que a é um ponto de acumulação de K.

Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } k \geq k_\varepsilon, \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Como os termos da subsequência são diferentes dois a dois, no máximo um deles é a, então os outros são diferentes de a. Logo a é um ponto de acumulação de K. $\square$