

CAPÍTULO 1. TEORIA ELEMENTAR DOS CONJUNTOS

SUMÁRIO

Introdução ao curso	1
1. Conjuntos e operações entre conjuntos	2
1.1. Revisão de algumas noções de lógica	2
2. Funções	5
2.1. Composição de funções	7
2.2. A imagem de um conjunto	7
2.3. A pré-imagem de um conjunto	9
3. Relações binárias	9

INTRODUÇÃO AO CURSO

O objetivo deste curso é fornecer uma introdução à análise real.

Análise real é a disciplina matemática que estuda números reais, sequências de números reais, funções com domínio e valores reais e suas propriedades.

A maioria dos conceitos considerados nesse curso são familiares (dos cursos de Cálculo). No entanto, o foco será no estudo formal e rigoroso destes conceitos, ao invés da abordagem mais computacional e aplicada das matérias anteriores.

Assim, vamos responder a perguntas do tipo:

- Como comparar a cardinalidade de vários conjuntos?
- O que é um número real?
- O que é e quando existe o limite de uma sequência de números reais? Como somar uma série infinita de números reais?
- O que é uma função contínua? Qual é o comportamento de uma função contínua em intervalos ou em outros tipos de conjuntos?

Por que estudar análise, por que cálculo não é suficiente?

Há muitas razões, uma delas é que uma compreensão mais profunda dos conceitos de cálculo nos impede de cometer erros graves, mesmo quando se trata de problemas práticos.

Exemplo 0.1 (Séries divergentes). Considere a série infinita

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Então

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2 + S$$

Logo, $S = 2$ (que, por acaso, é a resposta correta).

No entanto, se aplicarmos a mesma lógica à série

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots,$$

temos que

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1,$$

o que implica o resultado absurdo $S = -1$.

Um outro exemplo:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

pode ser escrita como

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S,$$

levando a $S = \frac{1}{2}$, mas também como

$$\begin{aligned} S &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + \dots = 1, \end{aligned}$$

absurdo (S não pode ser igual a $\frac{1}{2}$ e a 1 no mesmo tempo).

Exemplo 0.2 (Sequências divergentes). Seja x um número real qualquer e seja

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$$

Evidentemente $n + 1 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = L$$

Mas $x^{n+1} = x \cdot x^n$, então temos a relação $L = xL$.

Isso implica $x = 1$ ou $L = 0$. Mas claramente se $x = 2$, a sequência 2^n não pode convergir a 0 quando $n \rightarrow \infty$. Em outras palavras, há um error grave no nosso raciocínio.

1. CONJUNTOS E OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Definição 1.1. Um conjunto A é uma coleção (não ordenada) de objetos chamados elementos de A .

A notação $x \in A$ significa “ x pertence a A ”.

A notação $x \notin A$ significa “ x não pertence a A ”.

Exemplo 1.1. Se $A = \{1, 7, 6\}$ então $7 \in A$ mas $9 \notin A$.

Exemplo 1.2. Se A é o conjunto de todos os triângulos retângulos no plano, então um triângulo com lados 3, 4, 5 pertence a A , mas um triângulo com lados 2, 3, 4 não pertence a A .

Observação 1.1. Conjuntos podem ser objetos (elementos) também. Por exemplo, dado um conjunto A , temos

$$A \in \{3, A, x\}.$$

Definição 1.2. Dois conjuntos A e B são iguais ($A = B$) se todo elemento de A também é um elemento de B e vice-versa, ou seja:

$$A = B \text{ se e somente se } (x \in A \Rightarrow x \in B \text{ e } x \in B \Rightarrow x \in A).$$

1.1. Revisão de algumas noções de lógica. Usaremos a abreviação *sse* para a frase (extremamente comum neste curso) “se e somente se”.

Se P e Q são duas sentenças (ou afirmações ou proposições), então a notação $P \Rightarrow Q$ significa “ P implica Q ”, ou, em outras palavras, “se P vale então Q vale”.

A nova proposição $P \Rightarrow Q$ é equivalente à proposição (não P ou Q). Logo, ela é verdadeira sse P é falsa ou Q é verdadeira.

Lembre-se que em matemática, a palavra “ou” é geralmente inclusiva (no sentido que a afirmação “ A vale ou B vale” *inclui* a possibilidade do que A e B valham).

Ademais, a proposição $P \Rightarrow Q$ é equivalente à proposição “não $Q \Rightarrow$ não P ”, o que representa a base para argumentos/provas *por contradição*.

Isto é, às vezes ao fim de provar que $P \Rightarrow Q$, supomos que a afirmação (conclusão, neste cenário) Q seja falsa, e mostramos que a proposição (hipótese, neste cenário) P seja falsa também, uma contradição.

Duas proposições P e Q são equivalentes, e escrevemos $P \iff Q$, se elas têm o mesmo valor lógico, ou seja, são verdadeiras ou falsas no mesmo tempo.

Segue que $P \iff Q$ sse $(P \Rightarrow Q \text{ e } Q \Rightarrow P)$.

Em particular, se A e B são dois conjuntos, então

$A = B$ sse $\forall x$ temos que $x \in A \iff x \in B$.

O símbolo $\forall$ significa “para todo”. Além disso, o símbolo $\exists$ significa “existe”. Eles são chamados de *quantificadores lógicos*.

Axioma. (um axioma é um fato matemático aceito sem prova, um “dogma”)

Existe um conjunto $\emptyset$, chamado do conjunto vazio, que não contém nenhum elemento, ou seja, $\forall x$ temos $x \notin \emptyset$.

Definição 1.3. Sejam A e B dois conjuntos. A união de A e B é o conjunto $A \cup B$ que consiste em todos os elementos que pertencem a A ou a B (ou aos ambos conjuntos), ou seja,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Portanto $x \in A \cup B$ sse $(x \in A \text{ ou } x \in B)$.

Exemplo 1.3. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

Proposição 1.1. Se A, B, C são conjuntos, então

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup \emptyset = A.$$

Demonstração. Exercício. □

Definição 1.4. Dados dois conjuntos A e B , dizemos que A é um subconjunto de B , e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A também é um elemento de B , ou seja,

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Além disso, A é um subconjunto próprio de B se $A \subset B$ e $A \neq B$. Neste caso escrevemos $A \subsetneq B$.

Proposição 1.2. Sejam A, B, C conjuntos.

- Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.
- $A = B$ sse $A \subset B$ e $B \subset A$.

Demonstração. Exercício. □

Subconjuntos são muitas vezes definidos por uma propriedade específica, ou seja, dado um conjunto A e uma propriedade $P(x)$ sobre um objeto x , existe um conjunto B dos elementos de A que satisfazem a propriedade $P(x)$, ou seja,

$$B = \{x \in A : P(x) \text{ vale}\}.$$

Também usamos a notação

$$B = \{x \in A \mid P(x) \text{ vale}\}.$$

Exemplo 1.4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $P(x)$ a propriedade de x ser par.

Então $B = \{x \in A : P(x) \text{ é verdadeira}\} = \{2, 4\}$.

Definição 1.5. Sejam A e B dois conjuntos. A interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ de elementos que pertencem a ambos conjuntos, ou seja,

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Portanto, $x \in A \cap B$ sse $(x \in A \text{ e } x \in B)$.

Definição 1.6. Dois conjuntos A e B são disjuntos se eles não têm nenhum elemento em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.7. Sejam A e B dois conjuntos. A diferença de A e B é o conjunto $A \setminus B$ de elementos em A que não pertencem a B , ou seja,

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Portanto, $x \in A \setminus B$ sse $(x \in A \text{ e } x \notin B)$.

Proposição 1.3. Sejam A, B, C conjuntos. Então

- $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A.$
- $A \cap B = B \cap A.$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$

Demonstração. Vamos provar a propriedade $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (as outras são exercícios). Vale a seguinte série de equivalências:

$$\boxed{x \in A \cap (B \cup C)}$$

sse $x \in A$ e $x \in (B \cup C)$

sse $x \in A$ e $(x \in B \text{ ou } x \in C)$

sse $(x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C)$

sse $x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C$

sse $\boxed{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

o que prova a igualdade dos conjuntos $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

Seja X um conjunto que será visto como “universo” (por exemplo X é o conjunto de números reais).

Neste contexto, se $A \subset X$, denotamos o complemento de A (relativamente a X) por

$$A^c = X \setminus A.$$

Logo, $X = A \cup A^c$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Proposição 1.4. (relações de de Morgan) Sejam $A, B \subset X$. Então

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\text{e } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Demonstração. Para todo x tem-se

$$\boxed{x \in (A \cup B)^c}$$

sse $x \notin (A \cup B)$

sse $(x \notin A \text{ e } x \notin B)$

sse $(x \in A^c \text{ e } x \in B^c)$

sse $\boxed{x \in A^c \cap B^c},$

mostrando que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Além disso,

$$\boxed{x \in (A \cap B)^c}$$

sse $x \notin A \cap B$

sse $(x \notin A \text{ ou } x \notin B)$

sse $(x \in A^c \text{ ou } x \in B^c)$

sse $\boxed{x \in A^c \cup B^c}$,

mostrando que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

Descrevemos outras propriedades do conjunto complementar na seguinte proposição.

Proposição 1.5. *Sejam $A, B \subset X$. Então*

- $(A^c)^c = A$
- Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$
- $A \setminus B = A \cap B^c$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 1.8. Dado um conjunto X , denotamos por

$$\mathcal{P}(X) = 2^X = \{A : A \subset X\}$$

o conjunto de todos os subconjuntos de X .

Definição 1.9. Dados dois conjuntos A e B , seu produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Um par ordenado pode ser visto como um conjunto com dois elementos onde existe uma escolha do qual é o primeiro elemento (ou coordenada), neste caso a , e o qual é o segundo elemento (ou coordenada), neste caso b .

Temos que

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ e } b = b'.$$

Em particular, $(2, 3) \neq (3, 2)$.

Exemplo 1.5. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 7\}$ então $A \times B = \{(1, 0), (1, 7), (2, 0), (2, 7)\}$.

2. FUNÇÕES

Intuitivamente, uma função de A para B é uma regra que permite associar a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor de f em x .

A definição formal é a seguinte.

Definição 2.1. Uma função é uma tripla $f = (A, B, G)$, que consiste em três conjuntos:

- A (domínio da função),
- B (contradomínio da função), e
- $G \subset A \times B$ (o gráfico da função)

onde G satisfaz a seguinte propriedade:

para todo $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$, denotado por $f(x)$, tal que $(x, y) \in G$.

(Esta propriedade é chamada o teste da reta vertical.)

Em vez de $f = (A, B, G)$ usamos a notação mais sugestiva $f: A \rightarrow B$.

Exemplo 2.1. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos polígonos no plano e seja $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ a função (regra) que associa a cada polígono $P \in \mathcal{P}$ a sua área, ou seja, $f(P) = \text{área de } P$.

Formalmente, $f = (\mathcal{P}, \mathbb{R}, G)$, onde $G = \{(P, \text{área de } P) : P \text{ polígono}\}$.

Exemplo 2.2. Gostaríamos de definir a função que associa a cada número racional x , seu inverso multiplicativo, $\frac{1}{x}$. Temos que excluir $x = 0$ do domínio, então $f: \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Definição 2.2. Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva se entradas diferentes têm valores diferentes, ou seja, se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Equivalentemente, $f: A \rightarrow B$ é injetiva se dados $x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo 2.3. O exemplo mais simples de uma função injetiva é a inclusão. Se $A \subset B$, definimos $i: A \rightarrow B$ por

$$i(x) = x.$$

Então claramente i é injetiva.

Outros exemplos: qualquer função linear, por exemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = 7x + 3.$$

De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $7x_1 + 3 = 7x_2 + 3$, logo $7x_1 = 7x_2$, ou seja, $x_1 = x_2$, mostrando a injetividade de f .

Exemplo 2.4. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2$$

não é injetiva. De fato, $7 \neq -7$ mas $f(7) = f(-7) = 49$.

Definição 2.3. Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva se todo elemento do contradomínio é um valor, ou seja, se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 2.5. O exemplo mais simples de uma função sobrejetiva é uma projeção. De fato, dados dois conjuntos A e B , sejam

$$\pi_1: A \times B \rightarrow A, \quad \pi_1(x, y) = x$$

e

$$\pi_2: A \times B \rightarrow B, \quad \pi_2(x, y) = y$$

as projeções na primeira e respectivamente na segunda coordenada.

Dado $x \in A$, para qualquer $y \in B$ temos que $(x, y) \in A \times B$ e $\pi_1(x, y) = x$, logo π_1 é sobrejetiva. Similarmente para π_2 .

Um outro exemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 7x + 3.$$

Claramente, se $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y-3}{7}$ tal que $f(x) = y$, então f é sobrejetiva.

Exemplo 2.6. A função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva.

De fato, $f(x) = x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então nenhum $y \in \mathbb{Q}$ com $y < 0$ é um valor de f , ou seja, se $y \in \mathbb{Q}$, $y < 0$, não existe nenhum $x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = y$.

Definição 2.4. Uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetiva (ou uma bijeção) quando é injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 2.7. A função identidade $id: A \rightarrow A$, $id(x) = x$ é claramente bijetiva.

A função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 7x + 3$ é bijetiva.

Exemplo 2.8. A função $f: \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ não é sobrejetiva, então não é bijetiva.

A função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ não é injetiva, então não é bijetiva, onde $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$.

A função $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2$ não é bijetiva (nem injetiva, nem sobrejetiva).

Definição 2.5. Seja $f: A \rightarrow B$ uma função bijetiva. A função $f^{-1}: B \rightarrow A$ dada por

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se} \quad f(x) = y$$

é chamada a inversa de f .

Exemplo 2.9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 7$ é bijetiva. Tem-se

$$3x + 7 = y \Rightarrow x = \frac{y-7}{3}$$

Então a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(y) = \frac{y-7}{3}$.

2.1. Composição de funções. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ duas funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f .

Definição 2.6. A composição de g com f (ou a função composta) é a função

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

dada por

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in A.$$

Exemplo 2.10. Sejam $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 7x + 3$.

Então $g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 7\frac{1}{x} + 3.$$

Proposição 2.1. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$.

(i) Se $g \circ f$ é injetiva então f é injetiva

(ii) Se $g \circ f$ é sobrejetiva então g é sobrejetiva.

Demonstração. (i) Suponha que $f(x_1) = f(x_2)$.

Então evidentemente $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Logo, $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

Como $g \circ f$ é injetiva, segue que $x_1 = x_2$, mostrando a injetividade de f .

Deixamos (ii) como exercício. □

2.2. A imagem de um conjunto. Sejam $f: A \rightarrow B$ uma função e $X \subset A$ um subconjunto. Definimos a imagem do conjunto X pela função f como sendo o conjunto de valores de f em pontos de X , ou seja,

$$\begin{aligned} f(X) &= \{f(x) : x \in X\} \\ &= \{y \in B : \text{existe } x \in X, y = f(x)\}. \end{aligned}$$

Claramente $f: A \rightarrow B$ é sobrejetiva sse $f(A) = B$.

Proposição 2.2. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $X_1, X_2 \subset A$. Então

(i) $f(\emptyset) = \emptyset$,

(ii) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$,

(iii) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$,

(iv) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

Demonstração. (iii) Se $y \in f(X_1 \cup X_2)$ então existe $x \in X_1 \cup X_2$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in X_1 \cup X_2$, tem-se

$x \in X_1$, e neste caso $y = f(x) \in f(X_1)$,
ou $x \in X_2$, e neste caso $y = f(x) \in f(X_2)$.

Logo, $y = f(x)$ pertence a $f(X_1)$ ou a $f(X_2)$, então $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

Concluimos a prova da primeira inclusão, a saber,

$$f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2).$$

Reciprocamente, seja $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Então $y \in f(X_1)$ ou $y \in f(X_2)$.

No primeiro caso, existe $x_1 \in X_1$ tal que $y = f(x_1) \in f(X_1)$.

No segundo caso, existe $x_2 \in X_2$ tal que $y = f(x_2) \in f(X_2)$.

De qualquer forma, $y \in f(X_1)$ ou $y \in f(X_2)$, então $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

Concluimos a segunda inclusão, a saber,

$$f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2).$$

Portanto vale a igualdade.

Deixemos as provas das outras afirmações como exercícios. □

Observação: A última afirmação da proposição anterior afirma apenas que

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2).$$

A inclusão poderia ser estrita, ou seja, em geral,

$$f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2).$$

De fato, se $f : A \rightarrow B$ não é injetiva, existem $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Sejam $X_1 = \{x_1\}$ e $X_2 = \{x_2\}$.

Portanto $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $f(\emptyset) = \emptyset$ mas $f(X_1) = \{f(x_1)\} = \{y\}$ e $f(X_2) = \{f(x_2)\} = \{y\}$.

Então $f(X_1) \cap f(X_2) = \{y\} \neq \emptyset$.

Se, por outro lado, f é injetiva, a igualdade vale.

Proposição 2.3. *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $X_1, X_2 \subset A$. Se f é injetiva então*

$$f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2).$$

Demonstração. Se $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$ então $y \in f(X_1)$ e $y \in f(X_2)$. Logo, existem $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ tais que $y = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$. Portanto $f(x_1) = f(x_2)$, mas como f é injetiva, temos $x_1 = x_2$.

Por outro lado, $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, e como $x_1 = x_2$, concluímos que $x_1 = x_2 \in X_1 \cap X_2$, logo $y = f(x_1) = f(x_2) \in f(X_1 \cap X_2)$, ou seja, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$.

A outra inclusão foi deixada como exercício. As duas inclusões juntas implicam a igualdade. □

2.3. A pré-imagem de um conjunto.

Definição 2.7. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $Y \subset B$. A pré-imagem (ou imagem inversa) de Y pela função f é o conjunto de entradas cujos valores pertencem a Y , ou seja,

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Proposição 2.4. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $Y_1, Y_2 \subset B$. Então

- (i) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- (ii) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$
- (iii) $f^{-1}(Y_1^c) = (f^{-1}(Y_1))^c$
- (iv) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$
- (v) $f^{-1}(B) = A$
- (vi) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Demonstração. Temos que

$$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$$

sse $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$

sse $f(x) \in Y_1$ ou $f(x) \in Y_2$

sse $x \in f^{-1}(Y_1)$ ou $x \in f^{-1}(Y_2)$

sse $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$,

mostrando que

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2).$$

Deixamos as outras afirmações como exercícios. □

3. RELAÇÕES BINÁRIAS

Uma relação entre *dois* elementos de um conjunto é uma relação binária. Vamos definir dois tipos fundamentais de relações binárias: equivalência e ordem.

Seja A um conjunto. Uma relação $\sim$ entre elementos de A é uma *relação de equivalência* se ela satisfaz as seguintes propriedades:

- i) reflexividade: $x \sim x$
- ii) simetria: se $x \sim y$ então $y \sim x$
- iii) transitividade: se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$.

Dado $x \in A$, denotamos por

$$[x] = \{y \in A : y \sim x\}$$

a *classe de equivalência* de x .

Notamos que duas classes de equivalências $[x]$ e $[y]$ são iguais ou disjuntas. De fato, se elas não são disjuntas, então existe $z \in [x] \cap [y]$. Logo, $z \sim x$, e daí, $x \sim z$ e $z \sim y$. Usando a transitividade, segue que $x \sim y$, o que imediatamente implica a igualdade das classes de equivalência $[x]$ e $[y]$ (já que, para todo $a \in A$, tem-se $a \sim x$ sse $a \sim y$).

Portanto, como $x \sim x$, temos que $x \in [x]$, logo a união de todas as classes de equivalência é A .

Concluimos que as classes de equivalência formam uma partição do conjunto A .

Por fim, seja

$$A/\sim := \{[x] : x \in A\}$$

o conjunto de todas as classes de equivalência ou, em outras palavras, o *conjunto quociente*.

Exemplo 3.1. Congruência módulo 3 em $\mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência.

Lembre-se que $m \equiv n \pmod{3}$ se $3 \mid (m - n)$ (ou seja, 3 divide/é um divisor de $(m - n)$).

Por exemplo,

$$7 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$5 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$3 \not\equiv 2 \pmod{3}$$

Vamos verificar as propriedades da definição.

■ Reflexividade. $m \equiv m \pmod{3}$ já que $3 \mid 0 = (m - m)$

■ Simetria.

$$\begin{aligned} m \equiv n \pmod{3} &\Rightarrow 3 \mid (m - n) \\ &\Rightarrow 3 \mid (n - m) \\ &\Rightarrow n \equiv m \pmod{3}. \end{aligned}$$

■ Transitividade.

$$\begin{aligned} m \equiv n \pmod{3} &\Rightarrow 3 \mid (m - n) \\ n \equiv p \pmod{3} &\Rightarrow 3 \mid (n - p) \\ &\Rightarrow 3 \mid (m - n + n - p) \\ &\Rightarrow 3 \mid (m - p) \\ &\Rightarrow m \equiv p \pmod{3}. \end{aligned}$$

A classe de equivalência de um número inteiro n são todos os outros inteiros com o mesmo resto da divisão por 3, cujos valores possíveis são 0, 1 e 2.

Portanto o conjunto quociente

$$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\},$$

onde $[0]$ é o conjunto de todos os inteiros divisíveis por 3, $[1]$ é o conjunto de todos os inteiros com resto 1 na divisão por 3 e, por fim, $[2]$ é o conjunto de todos os inteiros com resto 2 na divisão por 3.

Definição 3.1. Seja A um conjunto. Uma relação $\preccurlyeq$ entre elementos de A é uma *relação de ordem* se ela satisfaz as seguintes propriedades:

- i) reflexividade: $x \preccurlyeq x$
- ii) antissimetria: se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x$ então $x = y$
- iii) transitividade: se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq z$ então $x \preccurlyeq z$.

Exemplo 3.2. Seja X um conjunto de referência. A inclusão

$$A \subset B \text{ é uma relação de ordem em } \mathcal{P}(X).$$

De fato,

- $A \subset A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$.
- Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.