# CAPÍTULO 4. NÚMEROS REAIS

Intuitivamente, um número real é uma sequência infinita de dígitos, por exemplo

$$1,414213562737...$$

que representa $\sqrt{2}$,

ou

$$3,141592653...$$

que representa $\pi$,

ou

$$2,71828...$$

que representa o número $e$, e etc.

Os racionais são incluídos, por exemplo

$$\frac{1}{2} = 0,5000...$$

$$\frac{4}{3} = 1,333...$$

Vamos definir $\mathbb{R}$, o conjunto de números reais, de uma maneira abstrata, como um *corpo ordenado completo.*

Lembre-se que todo corpo ordenado contém $\mathbb{Q}$ como subconjunto, então

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

**Definição 0.1.** Um corpo ordenado K se chama completo se todo subconjunto limitado superiormente possui um supremo.

**Proposição 0.1.** *Num corpo ordenado completo todo conjunto limitado inferiormente possui ínfimo.*

*Demonstração.* Sejam $K$ um corpo ordenado completo e $X \subset K$ um subconjunto limitado inferiormente, isto é, seja $b \in K$ tal que

$$b \leq x \text{ para todo } x \in X.$$

Então o conjunto

$$-X = \{-x : x \in K\}$$

é limitado superiormente por $-b$, já que

$$-x \leq -b \text{ para todo } x \in X.$$

Como $K$ é completo, existe $\sup(-X)$. Seja

$$b := -\sup(-X), \text{ então } \sup(-X) = -b$$

Vamos mostrar que $b$ é o ínfimo de $X$. De fato, como

$$-x \leq -b \quad \forall x \in X,$$

tem-se

$$b \leq x \quad \forall x \in X,$$

logo $b$ é uma cota inferior de $X$.

Se $c \in K$ é qualquer cota inferior de $X$, então

$$c \leq x \text{ para todo } x \in X$$

$$\Rightarrow -x \leq -c \text{ para todo } x \in X$$
$$\Rightarrow -c \text{ é cota superior de } -X$$
$$\Rightarrow -c \geq -b,$$

já que $-b$, como supremo de $-X$, é a menor cota superior de $-X$.

Então $c \leq b$, portanto $b$ é a maior cota inferior de $X$, ou seja, $b = \inf X$. □

**Proposição 0.2.** *Todo corpo ordenado completo $K$ é arquimediano, isto é, para todo $x \in K$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.*

*Demonstração.* Suponha por contradição que exista $x \in K$ tal que $n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathbb{N}$ é limitado superiormente por este elemento $x$.

Como $K$ é completo, existe o supremo de $\mathbb{N}$, seja ele $b$.

Como $b - 1 < b$, segue que $b - 1$ não é uma cota superior de $\mathbb{N}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > b - 1.$$

Logo $k + 1 \in \mathbb{N}$ e $k + 1 > b$, contradição com o fato de $b$ ser o supremo, então uma cota superior de $\mathbb{N}$. □

Acontece que existe um corpo completo ordenado. Além disso, se $K$ e $K'$ são dois corpos ordenados completos, então existe uma bijeção $f \colon K \to K'$ que preserva a estrutura algébrica e de ordem, no sentido que para todo $x, y \in K$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$\text{se } x \leq y \text{ então } f(x) \leq f(y).$$

Portanto $K'$ é uma cópia (ou imagem espelhada) de $K$, em outras palavras, podemos identificar $K'$ com $K$.

Em conclusão (via esta identificação) existe um único corpo ordenado completo, denotado por $\mathbb{R}$ e chamado de corpo dos números reais.

Portanto $\mathbb{R}$ é arquimediano e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Proposição:** Existe um único número $b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$, tal que $b^2 = 2$.

Chamamos este único número de $\sqrt{2}$.

*Demonstração.* Seja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}.$$

Então $A$ é claramente limitado superiormente porque se $c^2 > 2$ (por exemplo se $c = 2$) então $c^2 > x^2$ para todo $x \in A$
$\Rightarrow c > x$ para todo $x \in A$
$\Rightarrow c$ é uma cota superior de $A$.

Como $\mathbb{R}$ é completo, $A$ possui um supremo. Seja $b = \sup A$.

Vamos mostrar que $b^2 = 2$.

- Se $b^2 < 2$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b + \varepsilon)^2 < 2$.

De fato, dado um $\varepsilon > 0$ (a ser escolhido em breve),

$$\begin{aligned}(b+\varepsilon)^2 &= b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &< b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &= b^2 + \varepsilon(2b+1) < 2,\end{aligned}$$

se

$$\varepsilon < \frac{2-b^2}{2b+1}.$$

Observe que $\frac{2-b^2}{2b+1} > 0$, já que $b^2 < 2$.

Então escolhido $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon < \frac{b^2-2}{2b+1},$$

temos que

$$(b+\varepsilon)^2 < 2,$$

ou seja, $b+\varepsilon \in A$.

Mas $b+\varepsilon > b$, então $b$ não pode ser uma cota superior de $A$.

Isso mostra que a desigualdade $b^2 < 2$ não é possível.

- Se $b^2 > 2$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(b-\varepsilon)^2 > 2.$$

De fato, dado um $\varepsilon > 0$ (a ser escolhido em breve),

$$\begin{aligned}(b-\varepsilon)^2 &= b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &> b^2 - 2b\varepsilon > 2,\end{aligned}$$

se

$$\varepsilon < \frac{b^2-2}{2b}.$$

Então escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \frac{b^2-2}{2b} \text{ (o que é possível porque } b^2-2>0)$$

temos que $(b-\varepsilon)^2 > 2$ e, em particular, $b-\varepsilon > x$ para todo $x \in A$, logo $b-\varepsilon$ é uma cota superior de $A$.

Mas $b-\varepsilon < b$, então $b$ não pode ser o supremo de $A$ (ou seja, a menor cota superior).

Portanto, este caso em que $b^2 < 2$ também é impossível.

A única opção possível é que $b^2 = 2$. Então existe um número positivo $b$ tal que $b^2 = 2$.

Vamos provar que ele é único. Se $c > 0$, $c^2 = 2$
então $b^2 = c^2 \Rightarrow (b-c)(b+c) = 0$
$\Rightarrow b - c = 0$ ou $b + c = 0$
$\Rightarrow b = c$ ou $b = -c$ (esse segundo caso é impossível, $b > 0$ e $c > 0$).
Logo $b = c$, ou seja, provamos também a unicidade. □

**Observação 0.1.** Um argumento similar (mas um pouco mais técnico) mostra que dado qualquer número $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe um único $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ t.q.

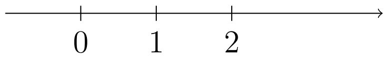
$$x^n = a.$$

Denotamos este número por $\sqrt[n]{a}$ (a raíz de ordem $n$ de $a$).

**Observação 0.2.** Lembre-se que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, isto é, todo número racional é real. Chamamos números reais que não são racionais de números irracionais. Por exemplo $\sqrt{2}$ é irracional, como já vimos.

Similarmente, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, $e$ etc são números irracionais.

Representamos o conjunto de números reais por uma reta, chamada a reta real.




**Definição 0.2.** Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $x \in X$ tal que $a < x < b$.

**Teorema 0.1.** *O conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Além disso, o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de números irracionais também é denso em $\mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

Então $b - a > 0$, e como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n(b-a) > 1$$

$$\Rightarrow nb > na + 1.$$

Usando de novo o fato de que $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > na$$

.

Seja

$$S = \{k \in \mathbb{N} : k > na\}.$$

Então $S \subset \mathbb{N}$ e $S$ não é vazio. Pelo princípio da boa ordenação, existe $\min S = m$.

Então $m \in S$, logo $m > na$, mas $m - 1 \notin S$, logo

$$m - 1 \leq na$$

$$\Rightarrow m \leq na + 1 < nb$$

Portanto $na \leq m \leq nb$, e daí,

$$a < \frac{m}{n} < b,$$

provando a primeira afirmação, já que $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Vamos provar a segunda afirmação. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$.

Então $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$, e pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ (já provada acima), existem $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ tal que

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a < \frac{m}{n}\sqrt{2} < b.$$

Temos que

$$\frac{m}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Caso contrário, se $\frac{m}{n}\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, então

$$\sqrt{2} = \frac{pn}{qm}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \text{ contradição.}$$

Logo $\frac{m}{n}\sqrt{2}$ é irracional e está entre $a$ e $b$. □

**Teorema 0.2** (O principio dos intervalos encaixados)**.** *Seja*

$$I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset I_{n+1} \supset ...$$

*uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados de números reais. Então a interseção* $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ *não é vazia. Em outras palavras, existe pelo menos um número real* $x$ *tal que*

$$x \in I_n \textit{ para todo } n \geq 1.$$

*Demonstração.* Para todo $n \geq 1$, seja

$$I_n = [a_n, b_n].$$

Como $I_{n+1} \subset I_n$, tem-se

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

para todo $n \geq 1$. Logo,

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_m \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Portanto $b_m$ é uma cota superior do conjunto

$$A := \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}.$$

Como $\mathbb{R}$ é completo, $A$ possui um supremo. Seja

$$a = \sup A,$$

e como $b_m$ é uma cota superior de $A$, tem-se

$$a \leq b_m \text{ para todo } m \geq 1.$$

Segue que $a$ é uma cota inferior do conjunto

$$B = \{b_1, ..., b_m, ...\}.$$

Como $\mathbb{R}$ é completo, $B$ possui ínfimo. Seja

$$b = \inf B,$$

e como $a$ é uma cota inferior de $B$, tem-se

$$a \leq b.$$

Além disso, como $a = \sup A$,

$$a_n \leq a \text{ para todo } n \geq 1$$

e como $b = \inf B$,

$$b \leq b_n \text{ para todo } n \geq 1.$$

Segue que para todo $n \geq 1$,

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n,$$

e daí $[a, b] \subset [a_n, b_n]$.

Portanto

(1) $$[a, b] \subset \bigcap_{n\geq 1} [a_n, b_n]$$

mostrando que a interseção não é vazia. □

**Observação 0.3.** Notamos que na verdade

$$[a,b] = \bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]. \tag{2}$$

De fato, se $y < a$, como $a = \sup A$, existe $m \geq 1$ tal que $y < a_m$, e daí $y \notin [a_m, b_m]$.

Similarmente, se $y > b$ então, como $b = \inf B$, existe $k \geq 1$ tal que $y > b_k$, e daí $y \notin [a_k, b_k]$.

Portanto, se $y \notin [a,b]$, então $y \notin \bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$, provando, junto com (1) a igualdade (2).

**Teorema 0.3.** *O conjunto $\mathbb{R}$ de números reais não é enumerável. Além disso, o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de números irracionais não é enumerável.*

*Ademais, qualquer intervalo próprio de números reais não é enumerável.*

*Demonstração.* Vamos provar primeiro que dado um intervalo próprio qualquer $I_0$, ele não é enumerável. Suponha por contradição que $I_0$ seja enumerável, então podemos escrever

$$I_0 = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}.$$

A seguinte afirmação é evidentemente verdadeira: dado um intervalo próprio qualquer $I$ e um ponto $x \in \mathbb{R}$, existe um subintervalo fechado e limitado $J \subset I$ tal que $x \notin J$.

Vamos usar repetidamente essa afirmação.

- Para o intervalo original $I_0$ e o ponto $x_1$, existe um subintervalo fechado e limitado $I_1 \subset I_0$ tal que $x_1 \notin I_1$.
- Para o intervalo $I_1$ e o ponto $x_2$, existe um subintervalo fechado e limitado $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$.
- Construídos os intervalos fechados e limitados $I_n \subset ... \subset I_2 \subset I_1$ com $x_n \notin I_n, ..., x_2 \notin I_2, x_1 \notin I_1$, para o intervalo $I_n$ e o ponto $x_{n+1}$, existe um intervalo fechado e limitado $I_{n+1} \subset I_n$ tal que $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

Por indução, construímos uma sequência de intervalos encaixados

$$... \subset I_n \subset ... \subset I_2 \subset I_1$$

com a propriedade $x_n \notin I_n$ para todo $n \geq 1$.

Pelo princípio dos intervalos encaixados, existe um número real $x$ tal que

$$x \in I_n \text{ para todo } n \geq 1.$$

Como $x_n \notin I_n$, tem-se $x \neq x_n$.

Logo $x \neq x_n$ para todo $n \geq 1$, uma contradição com o fato de que $I_0 = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. De fato, $x \in I_1 \subset I_0$, então $x \in I_0$, ou seja, $x$ deveria ser um dos pontos $x_n$.

Vamos lembrar que todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Portanto $\mathbb{R}$ não é enumerável, porque se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo próprio de números reais, como vimos, ele não é enumerável.

Além disso, união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável. Como $\mathbb{Q}$, o conjunto de números racionais, é enumerável, o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de números irracionais não pode ser enumerável. Caso contrário,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$$

seria enumerável, uma contradição. □