

## CAPÍTULO 5. SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

### SUMÁRIO

1.	Sequências de números reais	1
	Outros exemplos de sequências	3
2.	Limite de uma sequência	3
3.	Propriedades aritméticas dos limites	6
4.	Pontos limite de uma sequência	9
5.	Sequências de Cauchy	10
6.	Limite inferior e superior	11
7.	Limites infinitos	14

### 1. SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Intuitivamente, uma sequência de números reais é uma lista enumerável infinita com possíveis repetições

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

onde  $x_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Formalmente, uma sequência de números reais é uma função

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Denotamos  $x(n)$  por  $x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, também escrevemos

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Por exemplo, a sequência

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

é formalmente dada pela função

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Acontece que essa sequência também pode ser descrita por uma fórmula fechada,

$$x(n) = (-1)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Observação 1.1.** Uma sequência  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é representada pela lista enumerável infinita

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

e não pela sua imagem, que é o conjunto

$$x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

No exemplo anterior, em que

$$x(n) = (-1)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

a lista correspondente é

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

onde 1 e -1 são alternadamente repetidos um número infinito de vezes, enquanto a imagem de  $x$  é simplesmente o conjunto  $\{1, -1\}$ .

**Definição 1.1.** Uma sequência  $(x_n)_{n \geq 0}$  é limitada superiormente se existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que

$$x_n \leq b \text{ para todo } n \geq 0.$$

Similarmente,  $(x_n)_{n \geq 0}$  é limitada inferiormente se existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$a \leq x_n \text{ para todo } n \geq 0.$$

A sequência  $(x_n)_{n \geq 0}$  é limitada se ela é limitada superiormente e inferiormente, i.e., se existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$a \leq x_n \leq b \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

**Observação 1.2.** Uma sequência  $(x_n)_{n \geq 0}$  é limitada se e somente se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$|x_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, se  $|x_n| \leq M$  então

$$-M \leq x_n \leq M,$$

logo  $(x_n)_{n \geq 0}$  é limitada.

Por outro lado, se  $a \leq x_n \leq b$ , como

$$b \leq |b| \text{ e } -a \leq |a|,$$

então  $-|a| \leq a$ , temos que

$$-|a| \leq x_n \leq |b|$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $M = \max\{|a|, |b|\}$ . Então  $|b| \leq M$  e  $|a| \leq M$ , então

$$-M \leq x_n \leq M, \text{ logo } -M \leq x_n \leq M,$$

ou  $|x_n| \leq M$ .

**Definição 1.2.** Uma sequência  $(x_n)_{n \geq 0}$  é crescente se  $x_n < x_{n+1}$  para todo  $n \geq 0$ , isto é, se

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots .$$

Similarmente,  $(x_n)$  é decrescente se  $x_n > x_{n+1}$  para todo  $n \geq 0$ , isto é, se

$$x_0 > x_1 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots .$$

Além disso,  $(x_n)_n$  é não decrescente se  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n \geq 0$  e não crescente se  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n \geq 0$ . Uma sequência com uma dessas propriedades é dita monótona.

**Exemplo 1.1.** A sequência  $x_n = n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  é claramente crescente, enquanto  $x_n = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é decrescente. A sequência  $x_n = (-1)^n$  não é monótona.

**Definição 1.3.** Seja  $(x_n)_{n \geq 0}$  uma sequência de números reais. Dada uma sequência crescente de números naturais

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

a sequência

$$y_k = x_{n_k}, \quad k \geq 1$$

é chamada uma subsequência de  $(x_n)_n$ .

**Exemplo 1.2.** Dada uma sequência  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,

$$x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots$$

é a subsequência dos termos de índices pares. Similarmente,

$$x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}, \dots$$

é a subsequência dos termos ímpares. Outros exemplos de subsequências são:

$$x_1, x_2, x_4, x_8, \dots, x_{2^n}, \dots$$

ou

$$x_1, x_4, x_7, x_{10}, \dots, x_{n+3}, \dots$$

ou, mais geralmente, dado  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$(x_{k+n})_{n \in \mathbb{N}}$$

é a subsequências dps termos começando com o índice  $k$ .

**Outros exemplos de sequências.**

- $x_n = \frac{1}{n}$  para  $n \geq 1$ , ou seja,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Limitada por 0 e 1, decrescente.

- $x_n = a^n$  para  $n \geq 0$ , ou seja,  $a \in (0, 1)$

$$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

Limitada, decrescente.

- Dado  $a \in (0, 1)$ , para todo  $n \geq 0$

$$x_n = 1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Note que se  $a \in (0, 1)$ , então  $a^{n+1} \in (0, 1)$ . Logo

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{1 - a},$$

então a sequência é limitada e estritamente crescente.

- Dado  $R > 1$ ,  $x_n = R^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$1, R, R^2, \dots, R^n, \dots$$

Não limitada, crescente.

- $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$  limitada por 3, crescente.

## 2. LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Sejam  $(x_n)_n$  uma sequência de números reais e  $a \in \mathbb{R}$ .

Intuitivamente,  $(x_n)_n$  converge para  $a$  se os termos  $x_n$  da sequência se aproximam arbitrariamente perto de  $a$  se  $n$  é suficientemente grande.

Em outras palavras, dada qualquer ordem de proximidade  $\varepsilon$ , por exemplo  $\varepsilon = 0,001$  ou  $\varepsilon = 0,0000001$ , eventualmente (a partir de um certo limiar  $n_0$ ), todos os termos  $x_n$  se tornam mais próximos do que  $\varepsilon$  de  $a$ . Formalmente,

**Definição:** Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_\varepsilon \text{ implica } |x_n - a| \leq \varepsilon$$

**Exemplo 2.1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

De fato, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Pelo fato de ser arquimediano, existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ . Então para todo  $n \geq n_\varepsilon$  tem-se  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , e daí  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Logo,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon,$$

mostrando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Outras notações:

Neste caso dizemos também que a sequência  $(x_n)_n$  é convergente e seu limite é  $a$ .

**Exemplo 2.2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

De fato, por indução temos que

$$2^n \geq n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, dado  $\varepsilon > 0$ , como existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  com  $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ , segue que para todo  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon,$$

e daí

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

**Exemplo 2.3.** A sequência  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$  também converge para 0.

De fato,

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

se  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Teorema 2.4.** Se existir, o limite de uma sequência é único, isto é, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \text{ então } a = b.$$

*Demonstração.* Suponha por contradição que  $a \neq b$  e seja  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , para este  $\varepsilon$  existe  $n_1$  tal que

Se  $n \geq n_1$ , então  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Similarmente, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , existe  $n_2$  tal que

Se  $n \geq n_2$  então  $|x_n - b| < \varepsilon$ .

Seja  $N = \max\{n_1, n_2\}$ .

Logo  $N \geq n_1$  e  $N \geq n_2$ , e daí,  $|x_N - a| < \varepsilon$  e  $|x_N - b| < \varepsilon$ .

Portanto, pela desigualdade triangular,

$$|a - b| = |a - x_N + x_N - b| \leq |a - x_N| + |x_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|,$$

que implica o fato absurdo de que  $|a - b| < |a - b|$ .

Concluímos que  $a = b$ . □

**Teorema 2.5.** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  então toda subsequência de  $(x_n)_n$  converge para  $a$ .

*Demonstração.* Seja  $(x_{n_k})_k$  uma subsequência de  $(x_n)_n$ , então os números naturais índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$$

formam uma sequência crescente de números naturais.

Por indução (fixa o argumento), tem-se

$$n_k \geq k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então, dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , existe  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{se } k \geq n(\varepsilon) \text{ então } |x_k - a| < \varepsilon.$$

Logo, para todo  $k \geq n(\varepsilon)$ , como  $n_k \geq k \geq n(\varepsilon)$ , tem-se

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

provando que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . □

**Exemplo 2.6.** A sequência  $x_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  não converge.

De fato, a subsequência  $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é constante, portanto converge para 1.

Similarmente, a subsequência  $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$  é constante  $-1$ , portanto converge para  $-1$ .

Se a sequência  $(x_n)_n$  convergisse, qualquer subsequência dela convergiria para o mesmo limite, o que não é o caso, já que  $1 \neq -1$ .

Portanto  $(x_n)_n$  não converge. □

**Teorema 2.7.** *Toda sequência convergente é limitada. A recíproca não é verdadeira (veja o exemplo acima).*

*Demonstração.* Sejam  $(x_n)_n$  uma sequência,  $a \in \mathbb{R}$  e suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Para  $\varepsilon = 1$  existe um  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < 1$$

$$\Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1).$$

Considere o conjunto finito de números reais consistindo nos primeiros  $n_1$  termos da sequência  $(x_n)$  e nos pontos extremos  $a - 1$  e  $a + 1$ , isto é, seja

$$F = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, a - 1, a + 1\}.$$

Então  $F$  possui um máximo  $M$  e um mínimo  $m$  (sendo finito).

Consequentemente, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$m \leq x_n \leq M,$$

mostrando que  $(x_n)_n$  é limitada. □

**Teorema 2.8.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

*Mais precisamente, se  $(x_n)_n$  é não decrescente e limitada superiormente, então  $(x_n)_n$  é convergente e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Similarmente, se  $(x_n)_n$  é não crescente ( $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ) e limitada inferiormente, então  $(x_n)_n$  é convergente e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Demonstração.* Consideremos o primeiro caso, o segundo sendo similar (exercício).

$(x_n)_n$  satisfaz  $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $b = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Vamos provar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Então  $b - \varepsilon < b$ , e como  $b$  é a menor cota superior de  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , existe  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $b - \varepsilon < x_{n(\varepsilon)}$ .

Se  $n \geq n(\varepsilon)$ , como  $(x_n)_n$  é não decrescente, tem-se  $x_n \geq x_{n(\varepsilon)}$ . Portanto,

$$b - \varepsilon < x_{n(\varepsilon)} \leq x_n \quad \text{para todo } n \geq n(\varepsilon).$$

Por outro lado,  $b$  é uma cota superior de  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , logo

$$x_n \leq b < b + \varepsilon$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Concluimos que

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$$

para todo  $n \geq n(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon,$$

provando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . □

**Corolário 2.9.** *Seja  $(x_n)_n$  uma sequência monótona. Se  $(x_n)_n$  possui uma subsequência convergente, então  $(x_n)_n$  é convergente.*

*Demonstração.* Vamos tratar o caso de uma sequência não crescente,  $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ .

Seja  $(x_{n_k})_k$  uma subsequência convergente, então limitada, logo existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$x_{n_k} \leq M \quad \text{para todo } k.$$

Mas  $n_k \geq k \forall k \in \mathbb{N}$ , então  $x_{n_k} \geq x_k \forall k \in \mathbb{N}$

Logo  $x_k \leq x_{n_k} \leq M \forall k \in \mathbb{N}$ , ou seja, a sequência  $(x_k)_k$  é limitada superiormente. Sendo monótona por cima, pelo teorema anterior é convergente. □

### 3. PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES

Lembre-se que uma sequência de números reais  $(x_n)$  converge para  $a$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_\varepsilon$  então  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{sse} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0.$$

**Lema 3.1.** *Suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , onde  $a \neq 0$ . Então eventualmente, todos os termos da sequência são diferentes de 0, ou mais ainda, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,*

$$|x_n| \geq \frac{|a|}{2} > 0$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ . Como  $a \neq 0$ ,  $|a| > 0$ , então  $\varepsilon > 0$ . Como  $x_n \rightarrow a$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para este  $\varepsilon$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_0$ , então

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2}.$$

Logo, pela desigualdade triangular,

$$|a| = |a - x_n + x_n| \leq |a - x_n| + |x_n| < \frac{|a|}{2} + |x_n|,$$

e daí,

$$\frac{|a|}{2} < |x_n|.$$

Em particular, com  $\frac{|a|}{2} > 0$ ,  $|x_n| > 0$ , logo  $x_n \neq 0$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  e  $(y_n)_n$  é uma sequência limitada, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0.$$

*Demonstração.* Como  $(y_n)_n$  é limitada, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|y_n| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_\varepsilon$  então  $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ . Logo, para todo  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

então  $|x_n \cdot y_n| \leq \varepsilon$ , mostrando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$ .  $\square$

**Exemplo 3.3.** Seja  $x \in \mathbb{R}$  um número qualquer, e considere a sequência

$$x_n = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

De fato,  $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ . Claramente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , enquanto  $|\sin(nx)| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então a sequência  $(\sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada. Portanto, pelo teorema anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(nx) = 0.$$

**Teorema 3.4.** Sejam  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  duas sequências de números reais e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Então

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b.$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

$$(3) \quad \text{se } b \neq 0 \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

$$(4) \quad \text{se } b \neq 0 \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

*Demonstração.* (1) Seja  $\varepsilon > 0$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , existe  $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_1(\varepsilon)$  então  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , existe  $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_2(\varepsilon)$  então  $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Seja  $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ . Então para todo  $n \geq n(\varepsilon)$ ,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

provando a afirmação.

(2) Temos que

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = x_n y_n - a y_n + a y_n - a b = (x_n - a) \cdot y_n + a(y_n - b).$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ . Mas  $(y_n)_n$  converge, então é limitada. Logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) \cdot y_n = 0$ .

Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(y_n - b) = a \cdot 0 = 0$ . Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n - ab) = 0 + 0 = 0,$$

e daí,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$ .

(3) Temos que

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - y_n}{y_n \cdot b}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  e  $b \neq 0$ , por um lemma anterior, existe  $n_0$  tal que se  $n \geq n_0$  então

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}.$$

Portanto o denominador de  $b \cdot y_n$  satisfaz

$$|y_n \cdot b| = |y_n| \cdot |b| > |b| \cdot |b| = \frac{b^2}{2}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon$  tal que se  $n \geq n_\varepsilon$  então

$$|y_n - b| < \varepsilon \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Seja  $N(\varepsilon) = \max\{n_0, n_\varepsilon\}$ . Para todo  $n \geq N(\varepsilon)$  temos

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - y_n|}{|y_n \cdot b|} < \frac{\varepsilon \cdot \frac{b^2}{2}}{\frac{b^2}{2}} = \varepsilon,$$

logo  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

(4) Temos  $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$  e a conclusão segue usando (2) e (3). □

**Teorema 3.5.** *Sejam  $(x_n)_n$ ,  $(y_n)_n$ ,  $(z_n)_n$  três seqüências e suponha que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{para todo } n.$$

*Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , então  $(y_n)_n$  é convergente e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , existe  $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_1(\varepsilon)$  então  $z_n < a + \varepsilon$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , existe  $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_2(\varepsilon)$  então  $a - \varepsilon < x_n$ .

Seja  $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ .

Logo, para todo  $n \geq n(\varepsilon)$  tem-se

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

portanto

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$$

e daí  $|y_n - a| < \varepsilon$ , provando o teorema. □

## 4. PONTOS LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Sejam  $(x_n)_n$  uma sequência e  $a \in \mathbb{R}$ .

**Definição 4.1.** O número  $a$  se chama um valor de aderência (ou ponto limite) da sequência  $(x_n)_n$  quando existe uma subsequência  $(x_{n_k})_k$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

Evidentemente, se  $(x_n)_n$  converge para  $a$ , então  $a$  é o único valor de aderência de  $(x_n)_n$ .

**Exemplo 4.1.** A sequência

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

tem dois valores de aderência, 1 e  $-1$ .

**Lema 4.2.** O número  $a$  é um valor de aderência de  $(x_n)_n$  sse para todo  $\varepsilon > 0$  existe um conjunto infinito de índices  $n$  para os quais

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

*Demonstração.* Se  $a$  é um valor de aderência de  $(x_n)_n$ , então existe uma subsequência  $(x_{n_k})_k$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $k \geq k_\varepsilon$  então  $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ .

Logo, os índices  $n_k$  com  $k \geq k_\varepsilon$  satisfazem a propriedade desejada.

Vamos provar a recíproca. Suponha que para todo  $\varepsilon > 0$ , a desigualdade

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

vale para um número infinito de índices.

Para  $\varepsilon = 1$  existe um número infinito de índices  $n$  tal que  $|x_n - a| < 1$ , em particular existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_{n_1} - a| < 1$ .

Para  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  existe um número infinito de índices  $n$  tal que  $|x_n - a| < 1/2$ , em particular existe  $n_2 > n_1$  tal que  $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$ .

Suponha construídos os índices  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  com  $|x_{n_i} - a| < 1/i$  para  $i = 1, \dots, k$ .

Para  $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ , a desigualdade  $|x_n - a| < \frac{1}{k+1}$  vale para um número infinito de índices, e em particular existe  $n_{k+1} > n_k$  tal que  $|x_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}$ .

Por indução, para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$  e  $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ .

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ , concluímos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - a| = 0$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , completando a prova do lema.  $\square$

**Teorema 4.3.** Toda sequência limitada possui um valor de aderência.

*Demonstração.* Vamos usar o teorema dos intervalos encaixados. Seja  $(x_n)_n$  uma sequência limitada, então existem  $m, M \in \mathbb{R}$  tais que  $m \leq x_n \leq M$  para todo  $n \geq 0$ . Sejam  $I_0 = [m, M]$  e  $n_0 = 0$ , então  $x_{n_0} \in I_0$  e  $|I_0| = M - m$ .

Dividimos  $I_0$  em dois subintervalos fechados do mesmo comprimento. Um deles (pelo menos) deve conter um número infinito de índices  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > n_0$ . Denotamos um desses subintervalos por  $I_1$ . Então, seja  $n_1 > n_0$  tal que  $x_{n_1} \in I_1$ ,  $I_1 \subset I_0$ ,  $I_1$  é fechado,  $|I_1| = \frac{M-m}{2}$  e  $x_{n_1} \in I_1$ .

Construídos intervalos fechados  $I_k \subset I_{k-1} \subset \dots \subset I_1 \subset I_0$  com  $|I_k| = \frac{M-m}{2^k}$  e  $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1 > n_0$ ,  $x_{n_k} \in I_k$ , dividimos  $I_k$  em dois subintervalos fechados, de comprimentos iguais, e denotamos por  $I_{k+1}$  um deles que contém um número infinito de pontos  $x_n$  com  $n > n_k$ .

Seja  $n_{k+1} > n_k$  tal que  $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ . Então  $I_{k+1} \subset I_k$ ,  $I_{k+1}$  é fechado,  $|I_{k+1}| = \frac{|I_k|}{2} = \frac{M-m}{2^{k+1}}$  e  $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ .

Por indução temos uma sequência  $\{I_k\}_{k \geq 0}$  de intervalos fechados encaixados com  $|I_k| = \frac{(M-m)}{2^k} \rightarrow 0$  e uma subsequência  $(x_{n_k})_k$  tal que  $x_{n_k} \in I_k$  para todo  $k \geq 0$ .

Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe (pelo menos) um ponto  $a \in I_k$  para todo  $k \geq 0$ . Como  $x_{n_k} \in I_k$ , segue que  $|x_{n_k} - a| \leq |I_k| = \frac{(M-m)}{2^k}$ . Logo  $x_{n_k} \rightarrow a$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 5. SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Seja  $(x_n)_n$  uma sequência de números reais. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

então eventualmente, todos os termos da sequência estão perto de  $a$ , logo perto um do outro.

Intuitivamente, este é o conceito de sequência de Cauchy: uma sequência tal que eventualmente seus termos estão arbitrariamente próximos entre eles.

Toda sequência convergente é de Cauchy. Veremos que no espaço  $\mathbb{R}$ , a recíproca também é verdadeira.

**Definição 5.1.** Uma sequência  $(x_n)_n$  de números reais é uma sequência de Cauchy se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $n, m \geq n_\varepsilon$  então  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

**Teorema 5.1.** *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Portanto existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_\varepsilon$  então  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sejam  $n, m \geq n_\varepsilon$ . Logo

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que  $(x_n)_n$  é uma sequência de Cauchy.  $\square$

**Lema 5.2.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon = 1$ . Portanto existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n, m \geq n_1$  então  $|x_n - x_m| < 1$ .

Em particular, para todo  $n \geq n_1$ ,  $|x_n - x_{n_1}| < 1$ , o que implica  $x_{n_1} - 1 < x_n < x_{n_1} + 1$ .

Sejam  $M = \max\{x_0, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} + 1\}$  e  $m = \min\{x_0, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} - 1\}$ .

Então claramente para todo  $n \geq 0$ ,  $m \leq x_n \leq M$ , provando que  $(x_n)_n$  é limitada.  $\square$

**Teorema 5.3** (Critério de Cauchy). *Toda sequência de Cauchy é convergente.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_n$  uma sequência de Cauchy. Então ela é limitada e por um teorema anterior, possui uma subsequência convergente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

Vamos provar que na verdade  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ , existe  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $k \geq k_\varepsilon$  então

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $(x_n)_n$  é Cauchy, existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $n, m \geq n_\varepsilon$  então

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja  $N_\varepsilon = \max\{k_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ . Se  $k \geq N_\varepsilon$  então, como  $n_k > k$ , temos que

$$|x_k - a| = |x_k - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

provando que  $(x_k)_k$  é convergente. □

## 6. LIMITE INFERIOR E SUPERIOR

Seja  $(x_n)_n$  uma sequência limitada de números reais. Então existem  $m, M \in \mathbb{R}$  tais que

$$m \leq x_n \leq M \quad \forall n.$$

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , seja

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \\ &= \inf\{x_k : k \geq n\}. \end{aligned}$$

Observe que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} m &\leq a_n \leq M, \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$

A segunda afirmação vale porque

$$\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \supset \{x_{n+1}, \dots\}$$

e se  $A \subset B$  são conjuntos limitados, então

$$\begin{aligned} \inf A &\geq \inf B \\ \sup A &\leq \sup B. \end{aligned}$$

Segue que a sequência  $(a_n)_n$  é não decrescente e limitada, portanto é convergente, e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \sup_{n \geq 1} a_n \\ &= \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k \end{aligned}$$

se chama o limite inferior da sequência inicial.

Similarmente, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , seja

$$\begin{aligned} b_n &= \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \\ &= \sup\{x_k : k \geq n\}. \end{aligned}$$

Então para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} m &\leq b_n \leq M, \\ b_{n+1} &\leq b_n. \end{aligned}$$

Portanto  $(b_n)_n$  converge e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \inf_{n \geq 1} b_n \\ &= \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k \end{aligned}$$

se chama o limite superior da sequência.

Portanto, dada uma sequência limitada  $(x_n)_n$ , definimos

- O limite inferior

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k \\ &= \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k. \end{aligned}$$

■ O limite superior

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k \\ &= \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k.\end{aligned}$$

**Observação 6.1.** Claramente temos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} = b_n,$$

portanto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**Teorema 6.1.** *Seja  $(x_n)_n$  uma sequência limitada. Então, o  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  é o menor valor de aderência da sequência  $(x_n)_n$  e, simularmente, o  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  é o maior valor de aderência da sequência  $(x_n)_n$ .*

*Demonstração.* Vamos provar a primeira afirmação (a segunda é exercício).

1) O primeiro passo é provar que  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  é um valor de aderência.

Seja  $\varepsilon > 0$ . Basta mostrar que há uma infinidade de termos  $x_n$  em  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Lembre-se que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

onde

$$a_n = \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

Então existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_\varepsilon$ , então  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Logo, para todo  $k \geq n$ ,  $x_k \geq a_n > a - \varepsilon$ .

Por outro lado, como  $a_n < a + \varepsilon$  e  $a_n$  é a maior cota inferior de  $\{x_k : k \geq n\}$ , existe  $k_n \geq n$  tal que  $x_{k_n} < a + \varepsilon$ .

Segue que  $x_{k_n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Concluimos que para todo  $n \geq n_\varepsilon$ , existe  $k_n \geq n$  tal que  $x_{k_n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , então existe uma infinidade de termos da sequência  $(x_n)_n$  que pertencem ao intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Logo,  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  é um valor de aderência da sequência.

2) Vamos provar que  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  é o menor valor de aderência de  $(x_n)_n$ .

Seja  $x$  um valor de aderência qualquer. Então existe uma subsequência  $(x_{n_k})_k$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x.$$

Lembrando que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

onde

$$a_n = \inf\{x_\ell : \ell \geq n\},$$

temos que

$$a_{n_k} = \inf\{x_\ell : \ell \geq n_k\},$$

e daí

$$a_{n_k} \leq x_{n_k}.$$

Portanto, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a,$$

concluimos que  $a \leq x$ .

Logo,  $a$  é o menor valor de aderência. □

**Corolário 6.2.** Uma sequência limitada  $(x_n)_n$  é convergente se e somente se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Neste caso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Observação 6.2.** Lembre-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{quando}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\text{se } n \geq n_\varepsilon \text{ então } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Vamos descrever a negação dessa afirmação. O limite de  $(x_n)_n$  não é  $a$  significa:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k_n \geq n$$

tal que

$$|x_{k_n} - a| \geq \varepsilon_0.$$

*Prova do corolário.* “ $\Rightarrow$ ” Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Vamos provar que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Toda subsequência de  $(x_n)_n$  converge para  $a$ , então  $a$  é o único valor de aderência.

Logo,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ , que é o menor valor de aderência de  $(x_n)_n$ , tem que ser  $a$ .

Similarmente,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ , que é o maior valor de aderência de  $(x_n)_n$ , tem que ser  $a$  também.

“ $\Leftarrow$ ” Suponha que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Vamos provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Pela hipótese,  $a$  é o único valor de aderência de  $(x_n)_n$ .

Se  $a$  não é o limite de  $(x_n)_n$ , pela observação anterior, existem  $\varepsilon_0 > 0$  e uma subsequência  $(x_{k_n})_n$  tal que para todo  $n$ ,

$$|x_{k_n} - a| \geq \varepsilon_0.$$

Mas  $(x_{k_n})_n$  é limitada, portanto existe uma (sub)subsequência  $(x_{k_{n_\ell}})_\ell$  convergente.

Como  $a$  é o único valor de aderência de  $(x_n)_n$ , tem-se

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_{n_\ell}} = a,$$

contradição com o fato de que

$$|x_{k_{n_\ell}} - a| \geq \varepsilon_0,$$

para todo  $\ell$ .

$$\text{Então } a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

□

## 7. LIMITES INFINITOS

Há uma diferença entre os comportamentos das sequências divergentes

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

por um lado, e

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

ou

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

ou

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots$$

por outro lado.

**Definição 7.1.** Uma sequência  $(x_n)_n$  tende para  $\infty$ , e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

se para todo  $A > 0$  existe  $n_A \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_A$  então

$$x_n > A.$$

Similarmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

se para todo  $A > 0$  existe  $n_A \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_A$  então

$$x_n < -A.$$

**Exemplo 7.1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$$

**Exemplo 7.2.** Se  $a > 1$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

De fato, por um exercício anterior, para todo  $A > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$a^N > A.$$

Logo, se  $n \geq N$ ,  $a^n \geq a^N > A$ .

**Teorema 7.3.** (*Propriedades algébricas com limites infinitos*)

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  e  $(y_n)_n$  é limitada inferiormente, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty.$$

*Demonstração.* Existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que

$$y_n \geq m \quad \forall n.$$

Seja  $A > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , existe  $n_A$  tal que se  $n \geq n_A$ , então

$$x_n > A - m$$

Logo

$$x_n + y_n > (A - m) + m = A,$$

provando a afirmação. □