LISTA 7. SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

Exercício 1. Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, onde $x_n > 0$ para todo $n \geq 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1\, x_2 \cdots x_n} = c.$$

Exercício 2. Prove que se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge e } a_n \geq 0,$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

convergem.

Exercício 3. Seja

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$$

um polinômio de grau $d \geq 2$ (isto é, $a_d \neq 0$). Prove que a série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p(n)}$$

converge absolutamente.

Exercício 4. Prove que, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ converge,}$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

também converge.

Exercício 5. Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n$$

converge, para todo $r \in (-1, 1)$, e calcule o seu limite.

Exercício 6. Escreva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

como uma soma telescópica para concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exercício 7. Dadas séries de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0.$$

Prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

Exercício 8. Suponha que $(a_n)_{n\geq 1}$ seja uma sequência decrescente e que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente. Prove que $na_n \to 0$ quando $n \to \infty$.