LISTA 9. LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Exercício 1. Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $L \in \mathbb{R}$. Prove que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, dada qualquer sequência $(x_n)_n \subset X$ com $x_n \neq a$ para todo n, se $x_n \to a$ então $f(x_n) \to L$.

Exercício 2. Prove que uma função $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se a pré-imagem de qualquer conjunto aberto é relativamente aberta em X, isto é, se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, então existe $D \subset \mathbb{R}$ aberto tal que

$$f^{-1}(U) = D \cap X.$$

Exercício 3. Prove que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se e somente se a imagem de qualquer sequência de Cauchy em X é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ isto é, se $(x_n)_n \subset X$ é uma sequência de Cauchy, então

$$\big(f(x_n)\big)_n \subset \mathbb{R}$$

também é uma sequência de Cauchy.

Exercício 4. Prove que se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua e X é um conjunto limitado, então $f(X)$ é limitado também.

Dica: Uma opção é fazer uma prova por contradição e usar o exercício anterior.

Exercício 5. Seja $a \geq 0$ e defina a função

$$f : [a, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

(1) Prove que se $a > 0$, então f é Lipschitz contínua.
(2) Prove que se $a = 0$, então f não é Lipschitz contínua.
(3) Prove que se $a = 0$, então f é $\frac{1}{2}$-Hölder contínua.