SOLUÇÕES DO PRIMEIRO EXAME

Número total de pontos: 80.

Exercício 1. (15 pontos) (i) Defina o conceito de função sobrejetiva.

(ii) Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ duas funções. Mostre que se $g \circ f$ é sobrejetiva então g é sobrejetiva também.

Demonstração. (i) Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetiva se para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(ii) Sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ duas funções tais que $g \circ f\colon A \to C$ é sobrejetiva.
Seja $c \in C$. Então existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = c$, e daí,

$$g(f(a)) = c.$$

Portanto, para $b = f(a) \in B$ temos que

$$g(b) = c,$$

mostrando que g é sobrejetiva. □

Exercício 2. (15 pontos) No conjunto $\mathbb{N}$ de números naturais consideramos a relação "m divide n", ou seja

$$m|n \quad \text{se existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = m \cdot k.$$

Prove que $|$ é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

Demonstração. Vamos provar que a relação $|$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
(i) Reflexividade: para todo $n \in \mathbb{N}$, $n|n$ já que $n = n \cdot 1$.

(ii) Antissimetria: suponha que $m|n$ e $n|m$. Então existem $k, \ell \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = m \cdot k \quad \text{e} \quad m = n \cdot \ell.$$

Logo

$$m = n \cdot \ell = (m \cdot k) \cdot \ell = m \cdot (k\ell),$$

e daí, $m = m \cdot (k\ell)$.
Temos dois casos:

- se $m \neq 0$ então $k\ell = 1$, portanto $k = \ell = 1$, mostrando que $m = n$.
- se $m = 0$, como $n = m \cdot k = 0 \cdot k = 0$, também concluímos que $m = n$.

(iii) Transitividade: se $m|n$ e $n|p$ então existem $k, \ell \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = m \cdot k \quad \text{e} \quad p = n \cdot \ell.$$

Segue que

$$p = n\ell = (m \cdot k) \cdot \ell = m \cdot (k\ell),$$

e daí $m|p$.
Portanto $|$ é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

□

Exercício 3. (15 pontos) Prove que para todo $n \geq 1$,
$$4\,(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = n^2(n+1)^2.$$

Demonstração. Usamos indução matemática para provar que $\forall n \geq 1$, vale a propriedade
$$P(n): \quad 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = n^2(n+1)^2.$$

- Base da indução: $n = 1$. A propriedade $P(1)$ se torna
$$4 \cdot 1^3 = 1^2 \cdot 2^2$$
$$4 = 4,$$
que é verdadeiro.

- Passo indutivo: suponha que $P(n)$ seja verdadeira, isto é,
$$4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = n^2(n+1)^2.$$
Vamos provar $P(n+1)$. De fato,
$$\begin{aligned} &4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3) \\ &= 4(1^3 + \cdots + n^3) + 4(n+1)^3 \\ &= n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3 \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\ &= (n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) \\ &= (n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\ &= (n+1)^2(n+2)^2. \end{aligned}$$
Assim provamos $P(n+1)$.
Pelo princípio da indução concluímos que $P(n)$ seja verdadeira para todo $n \geq 1$. □

Exercício 4. (20 pontos) (i) Defina o conceito de conjunto finito.

(ii) Seja X um conjunto finito com n elementos, onde $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\mathcal{P}(X)$, o conjunto de todos os subconjuntos de X tem 2^n elementos.

Demonstração. (i) Um conjunto X é finito se ele é vazio ou se existem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $\varphi : I_n \to X$ bijetiva, onde $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(ii) Usamos indução matemática para provar que:
se $\operatorname{card} X = n$ então $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^n$.

- 1º passo: $n = 0$. Neste caso $X = \emptyset$, então $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ e
$$\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 1 = 2^0.$$

- Passo indutivo: suponha que dado *qualquer* conjunto X com $\operatorname{card} X = n$, tem-se $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^n$.

Seja Y um conjunto com $\operatorname{card} Y = n + 1$, então
$$Y = \{y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\}.$$
Seja $X = \{y_1, \ldots, y_n\}$, então $\operatorname{card} X = n$ e $Y = X \cup \{y_{n+1}\}$.

Dado um subconjunto $A \subset Y$, ou A não contém y_{n+1}, e neste caso $A \subset X$, ou $y_{n+1} \in A$, e neste caso $A = A' \cup \{y_{n+1}\}$, onde
$$A' = A \setminus \{y_{n+1}\} \subset X.$$

Portanto
$$\mathcal{P}(Y) = \{A : A \subset X\} \cup \{A' \cup \{y_{n+1}\} : A' \subset X\}.$$

O conjunto $\{A : A \subset X\} = \mathcal{P}(X)$ tem cardinalidade 2^n pela hipótese indutiva.

Além disso, como a função $\varphi : \{A' : A' \subset X\} \to \{A' \cup \{y_{n+1}\} : A' \subset X\}$,

$$\varphi(A') = A' \cup \{y_{n+1}\}$$

é claramente bijetiva, temos que

$$\text{card } \{A' \cup \{y_{n+1}\} : A' \subset X\} = \text{card } \{A' : A' \subset X\} = \text{card } \mathcal{P}(X) = 2^n.$$

Concluímos que

$$\text{card } \mathcal{P}(Y) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Pelo princípio da indução, a conclusão segue. □

Exercício 5. (15 pontos) Dado um conjunto X, denotamos por 2^X o conjunto de todas as funções $f \colon X \to \{0, 1\}$. Prove que $\mathcal{P}(X)$ e 2^X têm a mesma cardinalidade.

Demonstração. Definimos a função

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \to 2^X,$$
$$\varphi(A) = 1_A,$$

onde 1_A é a função indicadora de A, ou seja,

$$1_A : X \to \{0, 1\},$$
$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Observe que dados dois subconjuntos $A, B \subset X$,

$$A = B \quad \text{sse} \quad 1_A = 1_B,$$

já que um elemento $x \in A$ sse $1_A(x) = 1$ e $x \notin A$ sse $1_A(x) = 0$.

Isso mostra que a função φ é injetiva: se $\varphi(A) = \varphi(B)$ então $1_A = 1_B$ e daí $A = B$.

Além disso, seja $f : X \to \{0, 1\}$ uma função qualquer (em outras palavras, seja $f \in 2^X$). Definimos o conjunto

$$A = \{x \in X : f(x) = 1\}.$$

Logo

$$A^c = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Portanto $f = 1_A$, e daí $f = \varphi(A)$, mostrando que φ é sobrejetiva.

Concluímos que $\varphi : \mathcal{P}(X) \to 2^X$ é bijetiva, então $\mathcal{P}(X)$ e 2^X têm a mesma cardinalidade. □