LISTA 1: NOÇÕES DE TOPOLOGIA

Exercício 1. Seja (M, d) um espaço métrico e seja $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset M$ uma sequência que converge para o ponto p. Prove que toda subsequência de $\{x_k\}$ também converge para o ponto p.

Exercício 2. Considere a função $f\colon [0,1) \to \mathbb{S}^1$, $f(x) := e^{2\pi i x}$, onde $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$.
Prove que f é bijetora e contínua mas f^{-1} não é contínua (inclua duas provas diferentes para essa última afirmação).

Exercício 3. Seja (M, d) um espaço métrico.

(i) Dado um ponto $a \in M$, defina a função $f\colon M \to \mathbb{R}$ por $f(x) := d(x, a)$.
Prove que f é Lipschitz contínua.

(ii) Prove que $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ é contínua, onde $M \times M$ é munido com a métrica euclidiana de produto.

Exercício 4. Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica euclidiana.

(i) Prove que a adição
$$s\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ s(x, y) := x + y$$
é uma função contínua.

(ii) Prove que a multiplicação por qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ m(x) := \lambda \cdot x$$
também é contínua.

Exercício 5. Prove que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, munido com a métrica discreta, é um espaço métrico completo. Além disso, prove que o conjunto $\mathbb{N}$ é fechado, limitado mas não é compacto.

Exercício 6. Considere o espaço
$$C\left([0,1], \mathbb{R}\right) := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\ \text{ contínua}\}$$
munido com a distância uniforme
$$d_\infty(f, g) := \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x) - g(x)\right|.$$
Prove as seguintes afirmações:

(i) $\left(C\left([0,1], \mathbb{R}\right), d_\infty\right)$ é um espaço métrico completo.

(ii) A bola unitária fechada
$$B := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\ \text{ contínua}\colon\ |f(x)| \leq 1\ \text{ para todo } x \in [0,1]\}$$
é um conjunto limitado e fechado, mas não é compacto.

Exercício 7. Considere o conjunto $M := G \cup Y$, onde
$$G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}\ \text{ e } 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\right\}$$
$$Y := \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ -1 \leq y \leq 1\right\}.$$
Prove que M é um conjunto compacto e conexo, mas não é conexo por caminhos.