LISTA 2: FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS: NOÇÕES BÁSICAS

Exercício 1. Definimos a *conorma* de uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como

$$\mathrm{m}(T) := \inf\left\{\frac{\|Tv\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n,\, v \neq 0\right\}.$$

(i) Se T é um isomorfismo, prove que $\mathrm{m}(T) > 0$. A recíproca é verdadeira?
(ii) Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{m}(T) > 0$ prove que T é um isomorfismo.
(iii) O que acontece quando $\|T\| = \mathrm{m}(T)$?

Exercício 2. Sejam $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ duas transformações lineares.
Prove as seguintes afirmações:

(i) $\|S \circ T\| \leq \|S\|\,\|T\|$.
(ii) $\mathrm{m}(S \circ T) \geq \mathrm{m}(S)\,\mathrm{m}(T)$.

Exercício 3. Lembre-se que uma função $R\colon B(0,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita *sublinear* se $R(0) = 0$ e

$$\lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0\,.$$

(i) Explique porque R é contínua e também diferenciável no ponto 0.
(ii) Considere duas funções sublineares $R_1\colon B(0,\epsilon_1) \subset \mathbb{R}^n \to B(0,\epsilon_2) \subset \mathbb{R}^m$ e $R_2\colon B(0,\epsilon_2) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Prove que $R_2 \circ R_1$ é sublinear.

Exercício 4. Mostre que ambas as derivadas parciais da função

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

existem na origem, mas a função não é diferenciável na origem.

Exercício 5. Seja $B \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ uma transformação bilinear e defina $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por

$$\phi(x) := B(x,x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(i) Prove que ϕ é diferenciável de ordem dois e $(D^2\phi)_p = 2\,\mathrm{Sim}(B)$ em todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\mathrm{Sim}(B)\,(v,w) := \frac{1}{2}\,(B(v,w) + B(w,v)) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Prove que $(D^3\phi)_p = 0$ em todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 6. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e *conexo* e seja $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma função.

(i) Suponha que f seja diferenciável e $(Df)_x = 0$ para todo $x \in U$. Prove que f é uma função constante.

(ii) Suponha que f seja diferenciável de ordem dois e $(D^2 f)_x = 0$ para todo $x \in U$. Prove que f é uma função afim (linear + constante).

Exercício 7. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $p \in U$ um ponto e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma função, escrita em coordenadas como $f = (f_1, \ldots, f_m)$.
Suponha que cada coordenada f_i é diferenciável em p. Prove que f é diferenciável em p e expresse a derivada de f em termos das derivadas de suas coordenadas f_i.

Exercício 8. Seja $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

(i) Suponha que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Prove que $\frac{1}{f}$ é diferenciável e determine a sua derivada.

(ii) Prove que e^f é diferenciável e determine a sua derivada.

Explique todos os passos de uma maneira detalhada.