

LISTA 4: O CONCEITO DE INTEGRABILIDADE

Exercício 1. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma caixa n -dimensional e denote por

$$\mathcal{R}(B) := \{f: B \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é Riemann integrável}\}.$$

Seja $\mathcal{I}: \mathcal{R}(B) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{I}(f) := \int_B f(x) dx.$$

Prove as seguintes afirmações:

- (i) O conjunto $\mathcal{R}(B)$ é um espaço vetorial e a função \mathcal{I} é uma transformação linear.
- (ii) Se $f \in \mathcal{R}(B)$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in B$, então $\int_B f \geq 0$.
- (iii) Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in B$, então

$$m \cdot |B| \leq \int_B f \leq M \cdot |B|.$$

- (iv) Se f é Riemann integrável, então $|f|$ também é Riemann integrável e

$$\left| \int_B f \right| \leq \int_B |f|.$$

- (v) Se f é Riemann integrável, $f \geq 0$ e $\int_B f = 0$, então $f = 0$ q.t.p.

Exercício 2. Seja $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável segundo Riemann e seja $\mathcal{F} \subset B$ um conjunto finito. Suponha que $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in B \setminus \mathcal{F}.$$

Prove (*sem* usar o teorema de Riemann-Lebesgue) que g é Riemann integrável e

$$\int_B f = \int_B g.$$

Exercício 3. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma caixa n -dimensional. Prove as seguintes afirmações:

- (i) Se $f, g: B \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis, então $f \cdot g$ é integrável também.
- (ii) Se $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|f(x)| \geq \epsilon_0$ para todo $x \in B$, então a função $\frac{1}{f}$ é integrável também.
- (iii) Se $f: B \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ é integrável e $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $g \circ f$ é integrável.
- (iv) Se $E \subset B$ é um conjunto com fronteira negligenciável, então a função indicadora correspondente $\mathbf{1}_E$ é integrável.