

# MAT2310 Tópicos de Probabilidade I

## Propriedades estatísticas para certos sistemas dinâmicos

O objetivo principal deste curso é o estudo de tópicos recentes de teoria ergódica sobre leis limites (i.e. o princípio de grandes desvios, o teorema do limite central, decaimento de correlações) para certos sistemas dinâmicos com alguma hiperbolicidade.

As ferramentas principais usadas para obter tais propriedades estatísticas são o operador de transição de Markov ou o operador de transferência de Ruelle, mais precisamente, o comportamento assintótico das suas potências em espaços apropriados de observáveis.

### Pré-requisitos:

Introdução aos Sistemas Dinâmicos;  
Teoria Ergódica;  
Análise Funcional;  
Teoria da Probabilidade I.

### Informações gerais sobre o curso:

Aulas: segundas e quartas das 13h às 15h na sala L856.

Página do curso: [https://silviusklein.github.io/teaching/mat2935\\_2024.1/main.html](https://silviusklein.github.io/teaching/mat2935_2024.1/main.html)

A avaliação consiste em seminários sobre tópicos do curso escolhidos pelo professor.

Notas de aula: na página do curso, atualizadas semanalmente.

### Bibliografia:

[AFLV] José F. Alves, Jorge M. Freitas, Stefano Luzzatto, Sandro Vaienti, *From rates of mixing to recurrence times via large deviations*, Advances in Mathematics 228, 2011  
<https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.06.014>

[CDK] Ao Cai, Pedro Duarte, Silvius Klein, *Statistical properties for mixing Markov processes with applications to dynamical systems*, Preprint 2024,  
<https://arxiv.org/abs/2210.16908>

[DeKiLiv] Mark Demers, Niloofar Kiamari, Carlangelo Liverani, *Transfer operators in hyperbolic dynamics: an introduction*, 33° CBM, Publicações Matemáticas do IMPA, 2021,  
<https://www.mat.uniroma2.it/~liverani/Lavori/33CBM16-eBook.pdf>

[DK-CBM] Pedro Duarte, Silvius Klein, *Continuity of the Lyapunov exponents of linear cocycles*, 31° CBM, Publicações Matemáticas do IMPA, 2017,  
[https://impa.br/wp-content/uploads/2017/08/31CBM\\_02.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/08/31CBM_02.pdf)

[HH] Hubert Hennion, Loïc Hervé, *Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-Compactness*, Springer 2001.  
<https://link.springer.com/book/10.1007/b87874>

[Viana] Marcelo Viana, *Lectures on Lyapunov exponents*, Cambridge University Press, 2014.

## Tópicos principais do curso:

### 1. Leis limites para processos aleatórios aditivos

Neste capítulo introdutório revisamos alguns tópicos de probabilidades, como a lei dos grandes números, o princípio dos grandes desvios e o teorema do limite central para somas de variáveis aleatórias i.i.d. reais.

### 2. Sistemas dinâmicos estocásticos e o operador de Markov [CDK]

Neste capítulo introduzimos o conceito de sistema dinâmico estocástico e o operador de Markov associado. Apresentamos um resultado recente (veja [CDK]) do tipo estimativa de grandes desvios para sistemas de Markov fortemente misturadores e um teorema central do limite por Gordin e Lifshits no mesmo cenário. Esses conceitos e resultados abstratos serão aplicados, nos próximos capítulos, para vários modelos concretos de sistemas dinâmicos.

### 3. Leis limites para processos aleatórios multiplicativos [DK-CBM, HH, Viana]

Neste capítulo consideramos produtos de matrizes aleatórias i.i.d. Apresentamos os resultados análogos aos do primeiro capítulo para tais processos multiplicativos, ou seja o teorema de Furstenberg e Kesten e alguns teoremas de Le Page (sob hipóteses genéricas). Introduzimos e estudamos o operador de Markov correspondente a tais processos.

### 4. Leis limites para translações aleatórias no toro [CDK]

Neste capítulo consideramos caminhos aleatórios no toro, determinados por uma medida de probabilidade satisfazendo uma propriedade de mixing. Esses objetos podem ser modelados por um produto torcido dado por um shift de Bernoulli na base e uma translação na fibra. Derivamos leis limites para tais sistemas usando os resultados abstratos do Capítulo 2.

### 5. O operador de transferência de Ruelle [AFLV, HH]

Neste capítulo apresentamos um resultado abstrato (veja [AFLV]) relacionando decaimento de correlações com a disponibilidade de grandes desvios para alguns tipos gerais de sistemas dinâmicos. Além disso, introduzimos o operador de transferência e apresentamos um critério garantindo o decaimento de correlações de determinado tipo. Ademais, apresentamos conceitos e resultados fundamentais de análise funcional amplamente usados em teoria ergódica (i.e., operadores quase compactos e o teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu).

### 6. Mapas uniformemente expansores e outros tipos de sistemas (predominantemente) hiperbólicos [AFLV, DeKiLiv, CDK]

Neste capítulo final consideramos aplicações dos resultados abstratos dos capítulos 2 e 5 para mapas expansores e para vários outros sistemas dinâmicos (se o tempo permitir).