LISTA 2

Cada uma das cinco integrais a seguir deve ser calculada aplicando o método relevante (ou seja, a receita de cálculo) descrito(a) na aula, e *não* simplesmente usando a fórmula final obtida na aula.

Exercício 1. Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \operatorname{sen} \theta} \, d\theta \, .$$

Exercício 2. Calcule a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} \, dx \, .$$

Exercício 3. Calcule a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} \, dx \, .$$

Mais geralmente, para cada $t \in \mathbb{R}$, verifique a seguinte identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\,x}}{x^2 + 1} \, dx = \pi \, e^{-|t|} \, .$$

A integral acima se refere à transformada de Fourier (um conceito muitíssimo importante em análise) da função $\frac{1}{x^2+1}$.

Exercício 4. Calcule a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2} \, dx \, .$$

Mais geralmente, para cada $t \in \mathbb{R}$, verifique a seguinte identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\,x}}{x^2} \, dx = -\pi \, |t| \, .$$

Exercício 5. Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1) \sqrt{x}} \, dx \, .$$

Exercício 6. Seja $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$.

(1) Prove que $f(z)$ tem três zeros (contados segundo suas multiplicidades) em $\mathbb{D}$.
(2) Prove que todos os zeros de $f(z)$ estão no disco $D(0, \frac{5}{2})$.

Dica: No item (a) use o teorema de Rouché com $g(z) = 5z^3$. No item (b) use o teorema de Rouché com $g(z) = z^5$.

Exercício 7. Prove que as raízes de um polinômio dependem continuamente de seus coeficientes no seguinte sentido: dado $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n$, um polinômio de grau $n \geq 1$ cujas raízes $z_1, \dots, z_n$ são todas distintas, e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que todo polinômio $q(z) = b_0 + b_1 z + \dots b_n z^n$ com $\left|b_k - a_k\right| < \delta$ para $k = 0, \dots, n$, tem uma raiz em cada disco $D(z_k, \epsilon)$.

Exercício 8. (a) Prove que todo conjunto estrelado é simplesmente conexo.

(b) Prove que dados $0 \leq a < b < \infty$ e $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, o setor circular

$$\{z = r\, e^{i\theta} \colon a < r < b,\ \alpha < \theta < \beta\}$$

é simplesmente conexo.

(c) Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Prove que dois caminhos γ_1, γ_2 são homotópicos em Ω sse $\gamma_1 \vee (-\gamma_2)$ é homotópico a zero em Ω.

Exercício 9. Seja $F \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa que satisfaz

$$F(i) = 0 \quad \text{e} \quad \left|F(z)\right| \leq 1 \ \text{ para todo } \ z \in \mathbb{H}\,.$$

Prove que

$$\left|F(z)\right| \leq \left|\frac{z-i}{z+i}\right| \quad \text{para todo } \ z \in \mathbb{H}\,.$$

Exercício 10. Prove que a função $f(z) = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ é uma transformação conforme do semi disco $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1,\ \Im z > 0\}$ para o semiplano superior $\mathbb{H}$.