

MEDIDAS COM SINAL

SILVIUS KLEIN

SUMÁRIO

1.	O conceito de medida com sinal	1
2.	O teorema de decomposição de Hahn	4
3.	O teorema de decomposição de Jordan	8

Introduzimos o conceito de medida com sinal e provamos o teorema de decomposição de tal medida como diferença de duas medidas (positivas).

1. O CONCEITO DE MEDIDA COM SINAL

Definição 1. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma função $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$ é chamada de medida com sinal em $(\Omega, \mathcal{F})$ se

- μ atinge no máximo um dos valores: $+\infty, -\infty$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\sqcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ para toda sequência $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$.

Neste caso, a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida com sinal.

Observação 1. Uma medida com sinal não é necessariamente uma função monótona. Esta é a principal perda (ou diferença) relativamente a uma medida positiva (ou “honesta”). De fato, dado um espaço de medida com sinal $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, se $E, F \in \mathcal{F}$ e $E \subset F$, então como $F = E \sqcup (F \setminus E)$, tem-se

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E).$$

Portanto, se $\mu(F \setminus E)$ é negativo (o que pode acontecer), segue que $\mu(F) < \mu(E)$.

Lema 1. Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, se $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ são disjuntos dois a dois e se

$$\left| \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \right| < \infty$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| < \infty,$$

ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ converge absolutamente.

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, denotando $a_n := \mu(E_n)$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \in \mathbb{R},$$

logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente. Pelo teorema de rearranjos de Riemann, dado *qualquer* número real M , existe uma permutação $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (um rearranjo) tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = M.$$

Mas

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{\sigma(n)}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\sigma(n)}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right),$$

uma contradição.

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

□

Exemplo 1. Dadas μ_1 e μ_2 duas medidas (honestas) em $(\Omega, \mathcal{F})$, ambas finitas, ou pelo menos uma delas finita, temos que

$$\mu := \mu_1 - \mu_2$$

é uma medida com sinal.

Por exemplo, em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_{a_i}$ onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $a_i \in \mathbb{R}^d$ é uma medida com sinal. Além disso, $\mu = m + \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_{a_i}$ é uma medida com sinal também.

Note que $m - \#$, a diferença entre a medida de Lebesgue e a medida contagem, não é uma medida com sinal.

Observação 2. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. O conjunto $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ de todas as medidas com sinal e finitas (no sentido do que $\mu(E) \in \mathbb{R}$ para todo $E \in \mathcal{F}$) é um espaço vetorial. Esse é um dos motivos pelos quais o conceito foi criado.

Claramente, o conjunto $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{F})$ de todas as medidas finitas positivas não é um espaço vetorial, mas apenas um cone em $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$. Ademais, $\text{Prob}(\Omega, \mathcal{F})$, o conjunto de medidas de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$, é um subconjunto convexo no espaço vetorial $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$.

Exemplo 2. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida positiva e $f \in L^1(\mu)$, então $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$.

Definimos $\nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\nu(A) := \int_A f d\mu = \int_{\Omega} f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Então ν é uma medida (finita) com sinal.

De fato, escrevendo $f = f^+ - f^-$, tem-se

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Como $f^+, f^- \geq 0$ e, além disso,

$$\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty,$$

segue que

$$\nu^+(A) := \int_A f^+ d\mu$$

e

$$\nu^-(A) := \int_A f^- d\mu$$

são medidas positivas e finitas. Logo, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ é uma medida com sinal e finita.

Trocando a hipótese $f \in L^1(\mu)$ pela hipótese mais fraca de que f é mensurável e $\int f^+ d\mu < \infty$ ou (ao invés de e) $\int f^- < \infty$, ainda podemos concluir que ν é uma medida com sinal (mas não necessariamente finita).

Proposição 1 (propriedades básicas da medida com sinal). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida com sinal.*

- (i) Se $E, F \in \mathcal{F}$, $E \subset F$ e $|\mu(F)| < \infty$ então $|\mu(E)| < \infty$.
- (ii) Se $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ e $E_n \nearrow E$, então

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

- (iii) Se $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$, $E_n \searrow E$ e $|\mu(E_1)| < \infty$, então

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Demonstração. (i) Vamos supor que $\mu(A) \neq -\infty$ para todo $A \in \mathcal{F}$ (o caso $\mu(A) \neq +\infty$ para todo $A \in \mathcal{F}$ é tratado similarmente).

Escrevendo $F = E \sqcup (F \setminus E)$, tem-se $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$.

Suponha por contradição que $|\mu(E)| = \infty$, então $\mu(E) = +\infty$. Como $\mu(F \setminus E) \in (-\infty, \infty]$, segue que

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \infty + \mu(F \setminus E) = +\infty,$$

uma contradição.

- (ii) Como $E_n \nearrow E$, tem-se

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus E_2) \sqcup (E_{n+1} \setminus E_n) \cdots,$$

então

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) + \mu(E_3 \setminus E_2) + \mu(E_{n+1} \setminus E_n) + \cdots \\ &= \mu(E_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{n+1} \setminus E_n). \end{aligned}$$

Como, para todo $n \geq 1$, $E_n \subset E_{n+1}$, escrevendo $E_{n+1} = E_n \sqcup (E_{n+1} \setminus E_n)$, tem-se

$$\mu(E_{n+1}) = \mu(E_n) + \mu(E_{n+1} \setminus E_n).$$

Vamos analisar dois casos.

- Se $|\mu(E_n)| < \infty$ para todo $n \geq 1$, então, podemos concluir que para todo $n \geq 1$,

$$\mu(E_{n+1} \setminus E_n) = \mu(E_{n+1}) - \mu(E_n).$$

Portanto

$$\mu(E) = \mu(E_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{n+1} \setminus E_n) = \mu(E_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_{n+1}) - \mu(E_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

- Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu(E_k)| = \infty$, então, como $E_k \subset E_n \subset E$ para todo $n \geq k$, usando item (i) concluímos que $|\mu(E_n)| = \infty$ para todo $n \geq k$ e $|\mu(E)| = \infty$.

Lembrando que μ atinge no máximo um dos valores $-\infty, \infty$, concluímos que a sequência $\{\mu(E_n)\}_{n \geq k}$ é constante (igual a $-\infty$ ou ∞), então converge para $\mu(E)$.

- (iii) Exercício. □

2. O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE HAHN

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável.

Dada uma função mensurável com sinal $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$, os conjuntos

$$\mathcal{P} := \{f \geq 0\} = \{x \in \Omega: f(x) \geq 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{N} := \{f < 0\} = \{x \in \Omega: f(x) < 0\}$$

são mensuráveis e formam uma partição de Ω :

$$\Omega = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{N}.$$

Além disso, $f|_{\mathcal{P}} \geq 0$ e $f|_{\mathcal{N}} \leq 0$.

Acontece que um resultado análogo vale para *medidas* com sinal.

Seja μ uma medida com sinal em $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definição 2. Um conjunto $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ é chamado de totalmente positivo com respeito a μ (abreviado, $\mathcal{P}$ é μ -positivo) se

$$\mu(E) \geq 0 \text{ para todo } E \in \mathcal{F}, E \subset \mathcal{P}.$$

Neste caso, também escrevemos

$$\mu|_{\mathcal{P}} \geq 0.$$

Similarmente, um conjunto $\mathcal{N} \in \mathcal{F}$ é chamado totalmente negativo com respeito a μ (abreviado, $\mathcal{N}$ é μ -negativo) se

$$\mu(E) \leq 0 \text{ para todo } E \in \mathcal{F}, E \subset \mathcal{N}.$$

Neste caso, também escrevemos

$$\mu|_{\mathcal{N}} \leq 0.$$

Finalmente, um conjunto $\mathcal{Z} \in \mathcal{F}$ é μ -nulo, e escrevemos $\mu|_{\mathcal{Z}} = 0$ se

$$\mu(E) = 0 \text{ para todo } E \in \mathcal{F}, E \subset \mathcal{Z}.$$

Por exemplo, o conjunto vazio $\emptyset$ é μ -positivo, μ -negativo e μ -nulo.

Teorema 3 (de Hahn). *Dada uma medida com sinal μ em $(\Omega, \mathcal{F})$, existe uma partição mensurável $\Omega = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{N}$ tal que*

$$\mu|_{\mathcal{P}} \geq 0 \text{ e } \mu|_{\mathcal{N}} \leq 0.$$

Esta decomposição (chamada de Hahn) é única módulo conjuntos μ -nulos, ou seja, se $\Omega = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{N} = \mathcal{P}' \sqcup \mathcal{N}'$ são duas partições mensuráveis em conjuntos μ -positivos e μ -negativos respectivamente, então $\mu|_{\mathcal{P} \Delta \mathcal{P}'} = 0$ e $\mu|_{\mathcal{N} \Delta \mathcal{N}'} = 0$.

Adiamos um pouco a demonstração desse teorema.

Primeiro, vamos descrever alguns exemplos de decomposições de Hahn.

Exemplo 4. Em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ seja $\mu = m - \delta_a$, para algum $a \in \mathbb{R}^d$. Então

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^d \setminus \{a\} \text{ e } \mathcal{N} = \{a\}$$

é uma decomposição de Hahn de μ .

Exemplo 5. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida positiva, $f \in L^1(\mu)$ e $\nu(A) := \int_A f d\mu$.

Uma decomposição de Hahn de ν é

$$\mathcal{P} = \{f \geq 0\} \text{ e } \mathcal{N} = \{f < 0\}.$$

O próximo resultado contém as propriedades estruturais de conjuntos μ -positivos. Observemos que podemos sempre supor que $\mu(E) \neq \infty$ para todo $E \in \mathcal{F}$, pois, caso contrário, trabalhamos com a medida com sinal $-\mu$.

Lema 2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida com sinal. Suponha que $\mu < \infty$.*

(i) *Se $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ é uma sequência de conjuntos μ -positivos, então $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$ também é μ -positivo.*

(ii) *Se $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$ é μ -positivo e $E \subset F \subset \mathcal{P}$, então*

$$\mu(E) \leq \mu(F).$$

(iii) *Se E não é μ -positivo, então existe $F \subset E$ mensurável tal que*

$$\mu(F) > \mu(E).$$

Demonstração. (i) Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dois conjuntos μ -positivos. Dado $E \subset \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, como

$$E = (E \cap \mathcal{P}_1) \sqcup (E \cap (\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_2)),$$

segue que

$$\mu(E) = \mu(E \cap \mathcal{P}_1) + \mu(E \cap (\mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_1)).$$

Mas

$$E \cap \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_1, E \cap (\mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_1) \subset \mathcal{P}_2,$$

e daí concluímos que $\mu(E) \geq 0$. Logo, $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é μ -positivo.

Por indução, se $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ são μ -positivos, então $\mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k$ é μ -positivo.

Seja $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$ uma união enumerável de conjuntos μ -positivos.

Como

$$\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1 \cup (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \cup (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3) \cup \dots$$

e

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \subset \dots,$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n \subset \dots$$

Seja $E \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$ e para todo $n \geq 1$, sejam $E_n := E \cap \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_n$. Então $\mu(E_n) \geq 0$ e $E_n \nearrow E$ quando $n \rightarrow \infty$. Pela Proposição 1 item (ii), (o TCM para conjuntos),

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \geq 0,$$

logo o conjunto $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$ é μ -positivo.

(ii) Sejam $E \subset F \subset \mathcal{P}$ onde $\mathcal{P}$ é μ -positivo. Como $F = E \sqcup (F \setminus E)$ e $F \setminus E \subset \mathcal{P}$, tem-se $\mu(F \setminus E) \geq 0$ e

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E).$$

(iii) Seja $E \in \mathcal{F}$ um conjunto não μ -positivo. Então existe $A \in \mathcal{F}, A \subset E$ tal que $\mu(A) < 0$. Já que

$$E = A \sqcup (E \setminus A), E \setminus A \subset E,$$

temos que

$$\mu(E) = \mu(A) + \mu(E \setminus A) < \mu(E \setminus A),$$

e a conclusão segue com $F := E \setminus A$. □

Estamos prontos para provar o resultado principal dessa seção.

Demonstração (do teorema de Hahn). Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mu < \infty$. A ideia da prova é ser ganancioso¹ com a escolha de um conjunto μ -positivo $\mathcal{P}$. Seja

$$M := \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{F}, \mu|_E \geq 0\}.$$

Acontece que o supremo acima é atingido por um conjunto $\mathcal{P}$. Por ter sido escolhido de maneira gananciosa, como o maior, em algum sentido, conjunto μ -positivo, seu complementar terá que ser μ -negativo.

■ Vamos começar com a existência de um conjunto que realiza o supremo do conjunto

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{F}, \mu|_E \geq 0\}.$$

O conjunto acima não é vazio, já que $\mu|_{\emptyset} \geq 0$.

Além disso, existe uma sequência $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ de conjuntos μ -positivos tal que

$$\mu(\mathcal{P}_n) \rightarrow M \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Seja

$$\mathcal{P} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n.$$

Pelo Lema 2 item (i), o conjunto $\mathcal{P}$ é μ -positivo e em particular, $\mu(\mathcal{P}) \leq M$.

Além disso, para todo $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, então pelo Lema 2 item (ii), tem-se

$$\mu(\mathcal{P}_n) \leq \mu(\mathcal{P}),$$

e daí,

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{P}_n) \leq \mu(\mathcal{P}).$$

Concluimos que $\mu(\mathcal{P}) = M$.

■ Seja $\mathcal{N} := \Omega \setminus \mathcal{P}$. Vamos provar que $\mathcal{N}$ é totalmente negativo.

Suponha por contradição que $\mathcal{N}$ não seja μ -negativo, então existe $E_1 \subset \mathcal{N}$ tal que $\mu(E_1) > 0$.

O conjunto E_1 não pode ser μ -positivo (caso contrário, $\mathcal{P} \sqcup E_1$ seria μ -positivo também e $\mu(\mathcal{P} \sqcup E_1) = \mu(\mathcal{P}) + \mu(E_1) > M$, uma contradição). Então pelo Lema 2 item (iii), existe $E \subset E_1$, $E \in \mathcal{F}$, tal que $\mu(E) > \mu(E_1) > 0$. Logo existe $n \geq 1$ tal que $\mu(E) > \mu(E_1) + \frac{1}{n}$.

Seja $n_1 \geq 1$ o menor número natural n para o qual existe $E \subset E_1$, $E \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) > \mu(E_1) + \frac{1}{n}.$$

Concluimos o seguinte fato: como o conjunto E_1 tem medida μ positiva mas não é totalmente positivo relativamente a μ , existe um conjunto $E_2 \subset E_1$, $E_2 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E_2) > \mu(E_1) + \frac{1}{n_1},$$

onde n_1 é o menor número natural com essa propriedade.

Este argumento será usado uma infinidade de vezes ... mais uma.

De fato, o conjunto E_2 tem medida positiva mas não pode ser μ -positivo (caso contrário, $\mathcal{P} \sqcup E_2$ seria um conjunto μ -positivo de medida maior do que M). Pelo argumento anterior, podemos escolher o menor número natural n_2 para o qual existe $E_3 \subset E_2$, $E_3 \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E_3) > \mu(E_2) + \frac{1}{n_2}.$$

¹Embora reconheça que se trata de uma abordagem comum e bem-sucedida em vários argumentos da teoria da medida, oponho-me inteiramente à ganância como um atributo pessoal ou comportamento social, ou às suas ramificações políticas.

Por indução, obtemos uma sequência $\{n_k\}_{k \geq 1}$ de números naturais e uma sequência $\{E_k\}_{k \geq 1}$ de conjuntos $\mathcal{F}$ -mensuráveis tais que para todo $k \geq 1$,

$$E_k \subset E_{k+1}$$

e

$$\mu(E_{k+1}) > \mu(E_k) + \frac{1}{n_k}$$

onde n_k é o menor número natural com essa propriedade.

Observe que em particular a sequência $\{\mu(E_k)\}_{k \geq 1}$ é crescente.

Seja $E_\infty := \bigcap_{k \geq 1} E_k$. Como $\mu(E_1) < \infty$ e $\mu(E_1) > 0$, tem-se $|\mu(E_1)| < \infty$. Pela Proposição 1 item (iii) (teorema de convergência monótona para conjuntos),

$$\mu(E_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \sup_{k \geq 1} \mu(E_k) \geq \mu(E_1) > 0.$$

Por outro lado, para todo $k \geq 1$ temos

$$\infty > \mu(E_\infty) \geq \mu(E_{k+1}) > \mu(E_k) + \frac{1}{n_k} > \cdots > \mu(E_1) + \left(\frac{1}{n_k} + \cdots + \frac{1}{n_1} \right).$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty$, logo $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Mais uma vez, como $E_\infty \subset \mathcal{N}$ e $\mu(E_\infty) > 0$, o conjunto E_∞ não pode ser μ -positivo (caso contrário, $\mathcal{P} \sqcup E_\infty$ seria μ -positivo, com medida $> M$, uma contradição).

Por isso, existem $E' \subset E_\infty$ um conjunto $\mathcal{F}$ -mensurável e $n' \in \mathbb{N}$ tais que

$$\mu(E') > \mu(E_\infty) + \frac{1}{n'}.$$

Para *todo* $k \geq 1$ temos que $E' \subset E_\infty \subset E_k$, então $E' \subset E_k$ e, como $\mu(E_\infty) > \mu(E_k)$,

$$\mu(E') > \mu(E_k) + \frac{1}{n'}.$$

Pela escolha de n_k como o menor número natural com essa propriedade, segue que $n' \geq n_k$. Essa desigualdade vale para todo $k \geq 1$, uma contradição com o fato de que $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Portanto, $\mathcal{N}$ é μ -negativo, provando a existência da partição de Hahn.

■ Vamos provar a unicidade módulo conjuntos μ -nulos da partição. Sejam

$$\Omega = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{N} = \mathcal{P}' \sqcup \mathcal{N}'$$

duas partições mensuráveis com $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ conjuntos μ -positivos e $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ conjuntos μ -negativos.

Vamos provar que $\mathcal{P} \Delta \mathcal{P}'$ é μ -nulo (a prova da outra afirmação é idêntica). De fato,

$$\mathcal{P} \Delta \mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') \cup (\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) = (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'^c) \cup (\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}^c) = (\mathcal{P} \cap \mathcal{N}') \cup (\mathcal{P}' \cap \mathcal{N}).$$

O conjunto $\mathcal{P} \cap \mathcal{N}'$ é claramente μ -positivo (se $E \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{N}' \subset \mathcal{P}$, então $\mu(E) \geq 0$) e μ -negativo (se $E \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}'$, então $\mu(E) \leq 0$), então é μ -nulo. Similarmente, $\mathcal{P}' \cap \mathcal{N}$ é μ -nulo, mostrando que a diferença simétrica $\mathcal{P} \Delta \mathcal{P}'$ é um conjunto μ -nulo. $\square$

3. O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE JORDAN

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida. Vamos mostrar que uma medida com sinal possui uma única decomposição como diferença de medidas positivas com suportes disjuntos.

Dado um conjunto $\mathcal{F}$ -mensurável A , dizemos que uma medida com sinal μ é suportada em A , e escrevemos $\text{supp}(\mu) \subset A$, se para todo conjunto $\mathcal{F}$ -mensurável $E \subset A^c$ temos $\mu(E) = 0$.

Definição 3. Duas medidas (com sinal) μ e ν são mutuamente singulares, e escrevemos $\mu \perp \nu$, se elas são suportadas em conjuntos disjuntos, ou seja, se existe $A \in \mathcal{F}$ tal que

$$\text{supp}(\mu) \subset A \quad \text{e} \quad \text{supp}(\nu) \subset A^c.$$

Exemplo 6. Em $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, a medida de Lebesgue m é claramente singular relativamente a uma combinação linear de medidas de Dirac, ou seja,

$$m \perp \sum_{i=1}^k t_i \delta_{a_i},$$

onde $t_i \in \mathbb{R}$ e $a_i \in \mathbb{R}^d$ para $1 \leq i \leq k$.

Exemplo 7. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uma medida com sinal e $A \in \mathcal{F}$. Então

$$\mu|_A \perp \mu|_{A^c},$$

onde a medida $\mu|_A$ é definida por

$$\mu|_A(E) := \mu(E \cap A) \quad \text{para todo} \quad E \in \mathcal{F}.$$

Teorema 8 (de decomposição de Jordan). *Seja μ uma medida com sinal em $(\Omega, \mathcal{F})$. Então existe uma única decomposição*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

onde μ^+ e μ^- são medidas positivas e $\mu^+ \perp \mu^-$.

Demonstração. Seja $\Omega = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{N}$ uma partição de Hahn referente à medida μ . Para todo $E \in \mathcal{F}$, definimos

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &:= \mu(\mathcal{P} \cap E) \\ \mu^-(E) &:= -\mu(\mathcal{N} \cap E). \end{aligned}$$

Evidentemente $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e não é difícil verificar (exercício!) que μ^+ e μ^- são medidas positivas em $(\Omega, \mathcal{F})$.

Além disso, claramente, $\text{supp}(\mu^+) \subset \mathcal{P}$, $\text{supp}(\mu^-) \subset \mathcal{N}$ e como $\mathcal{P} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ temos que $\mu^+ \perp \mu^-$.

Portanto μ^+ e μ^- satisfazem as hipóteses da decomposição de Jordan, provando sua existência.

Resta provar a unicidade da decomposição. Seja $\mu = \mu_1 - \mu_2$ uma outra decomposição com μ_1, μ_2 medidas positivas e $\mu_1 \perp \mu_2$. Então existe uma partição mensurável $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ tal que $\text{supp}(\mu_1) \subset \Omega_1$ e $\text{supp}(\mu_2) \subset \Omega_2$.

Vamos provar que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ é uma partição de Hahn para μ .

■ Se $E \subset \Omega_1$ é $\mathcal{F}$ -mensurável então

$$\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) = \mu_1(E) \geq 0$$

já que μ_2 é suportada em $\Omega_2 = \Omega_1^c$. Logo $\mu|_{\Omega_1} \geq 0$.

■ Similarmente, se $F \subset \Omega_2$ é $\mathcal{F}$ -mensurável, então

$$\mu(F) = \mu_1(F) - \mu_2(F) = -\mu_2(F) \leq 0$$

já que μ_1 é suportada em $\Omega_1 = \Omega_2^c$. Logo $\mu|_{\Omega_2} \leq 0$.

Portanto $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ é, de fato, uma partição de Hahn para μ .

Como a decomposição de Hahn é única módulo conjuntos μ -nulos, segue que

$$\mu|_{\mathcal{P} \Delta \Omega_1} = 0 \quad \text{e} \quad \mu|_{\mathcal{N} \Delta \Omega_2} = 0.$$

Para provar que $\mu^+ = \mu_1$ e $\mu^- = \mu_2$ basta mostrar que $\mu^+(E) = \mu_1(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}$. Fixe $E \in \mathcal{F}$ arbitrário.

Por definição, $\mu^+(E) = \mu(E \cap \mathcal{P})$.

Vamos mostrar uma fórmula similar para μ_1 , a saber, $\mu_1(E) = \mu(E \cap \Omega_1)$. De fato,

$$\mu_1(E) = \mu_1(E \cap \Omega_1) + \mu_1(E \cap \Omega_2) = \mu_1(E \cap \Omega_1),$$

pois $E \cap \Omega_2 \subset \Omega_2 = \Omega_1^c$ e $\text{supp}(\mu_1) \subset \Omega_1$.

Mas

$$\mu(E \cap \Omega_1) = \mu_1(E \cap \Omega_1) - \mu_2(E \cap \Omega_1) = \mu_1(E \cap \Omega_1)$$

pois $E \cap \Omega_1 \subset \Omega_1 = \Omega_2^c$ e $\text{supp}(\mu_2) \subset \Omega_2$.

Portanto, $\mu_1(E) = \mu(E \cap \Omega_1)$, e resta provar que

$$\mu(E \cap \mathcal{P}) = \mu(E \cap \Omega_1),$$

que será uma consequência simples da unicidade da decomposição de Hahn, ou seja, do fato de que

$$\mu|_{\mathcal{P} \Delta \Omega_1} = 0.$$

Como

$$E \cap \mathcal{P} = (E \cap \mathcal{P} \cap \Omega_1) \sqcup ((E \cap \mathcal{P}) \setminus \Omega_1)$$

$$\text{e } (E \cap \mathcal{P}) \setminus \Omega_1 \subset \mathcal{P} \setminus \Omega_1 \subset \mathcal{P} \Delta \Omega_1,$$

tem-se

$$\mu(E \cap \mathcal{P}) = \mu(E \cap \mathcal{P} \cap \Omega_1) + \mu((E \cap \mathcal{P}) \setminus \Omega_1) = \mu(E \cap \mathcal{P} \cap \Omega_1).$$

Similarmente,

$$E \cap \Omega_1 = (E \cap \Omega_1 \cap \mathcal{P}) \sqcup ((E \cap \Omega_1) \setminus \mathcal{P})$$

$$\text{e } (E \cap \Omega_1) \setminus \mathcal{P} \subset \Omega_1 \setminus \mathcal{P} \subset \mathcal{P} \Delta \Omega_1,$$

logo

$$\mu(E \cap \Omega_1) = \mu(E \cap \Omega_1 \cap \mathcal{P}) + \mu((E \cap \Omega_1) \setminus \mathcal{P}) = \mu(E \cap \Omega_1 \cap \mathcal{P}),$$

mostrando que $\mu(E \cap \mathcal{P}) = \mu(E \cap \Omega_1)$ e finalizando a prova. $\square$

Definição 4. Seja μ uma medida com sinal em $(\Omega, \mathcal{F})$, e seja $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sua decomposição de Jordan. Então,

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-$$

é uma medida (positiva) em $(\Omega, \mathcal{F})$ chamada a variação total de μ .

Observe que a medida μ é finita se e somente se $|\mu| < \infty$, que é equivalente ao fato das ambas medidas μ^+, μ^- serem finitas.

Além disso, a medida μ é dita σ -finita se $|\mu|$ é σ -finita, que é equivalente ao fato de que μ^+, μ^- são σ -finitas).

Observação 3. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Então

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}) := \{\mu : \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty] : \mu \text{ medida com sinal, finita}\}$$

é um espaço vetorial normado, onde a norma é dada por: $\|\mu\|_{\text{VT}} := |\mu|(\Omega)$.