

OS TEOREMAS DE LEBESGUE, RADON E NIKODYM

SILVIUS KLEIN

SUMÁRIO

1. Relação com uma medida de referência	1
2. O teorema de decomposição de Lebesgue, Radon, Nikodym	5
3. O teorema de Radon, Nikodym	5
4. O teorema de decomposição de Lebesgue	5
5. A função de distribuição acumulada	5
6. Aplicação em probabilidades: esperança condicionada	5

1. RELAÇÃO COM UMA MEDIDA DE REFERÊNCIA

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ um espaço de medida (positiva) σ -finita, a ser chamada de *medida de referência*.

Um exemplo típico é o espaço euclidiano com a σ -álgebra de Borel e a medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$.

Seja $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ uma função mensurável tal que

$$f \geq 0 \quad \text{ou} \quad \int |f| dm < \infty \quad \text{ou} \quad \int f^+ dm < \infty, \quad \text{ou} \quad \int f^- dm < \infty.$$

Definimos

$$m_f(E) := \int_E f dm = \int_\Omega f \mathbf{1}_E dm.$$

Então m_f é uma medida com sinal em $(\Omega, \mathcal{F})$. De fato, como $f = f^+ - f^-$, temos

$$m_f(E) = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm.$$

Note que m_{f^+} e m_{f^-} são medidas positivas. Além disso,

$$|m_f| = m_{f^+} + m_{f^-} = m_{|f|}.$$

Em particular,

$$|m_f|(\Omega) = \int_\Omega |f| dm.$$

Logo m_f é uma medida finita se e somente se $f \in L^1(m)$. Ademais,

$$m_f \geq 0 \iff f \geq 0 \quad \text{m-q.t.p.}$$

e

$$m_f = 0 \iff f = 0 \quad \text{m-q.t.p.}$$

Consequentemente,

$$m_{f_1} = m_{f_2} \iff f_1 = f_2 \quad \text{m-q.t.p.}$$

Usando o mecanismo padrão, não é difícil provar que para toda função mensurável $\varphi \geq 0$,

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mathbf{m}_f = \int_{\Omega} \varphi f \, d\mathbf{m},$$

o que pode ser descrito simbolicamente por

$$d\mathbf{m}_f = f \, d\mathbf{m}.$$

Definição 1 (temporária). Uma medida (com ou sem sinal) μ em $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamada diferenciável com respeito à medida de referência $\mathbf{m}$ se existe uma função mensurável $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ tal que $\mu = \mathbf{m}_f$, isto é, se

$$\mu(E) = \int_E f \, d\mathbf{m} \quad \forall E \in \mathcal{F},$$

ou, equivalentemente, se

$$d\mu = f \, d\mathbf{m}.$$

Neste caso a função f é única, se chama a derivada de Radon–Nikodym de μ com respeito a $\mathbf{m}$ e escrevemos

$$f = \frac{d\mu}{d\mathbf{m}}.$$

Exemplo 1. Seja $\mathbf{m}$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Se μ é uma medida finita em $\mathbb{R}$, diferenciável em relação a $\mathbf{m}$, então a derivada de Radon–Nikodym correspondente é dada por

$$f(x) = \frac{d\mu}{d\mathbf{m}}(x) = \frac{d}{dx} \mu([0, x]) \quad \mathbf{m}\text{-q.t.p.}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mu([0, x]) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu([0, x+h]) - \mu([0, x])}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu([x, x+h])}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f \, d\mathbf{m}. \end{aligned}$$

Portanto basta provar que para $\mathbf{m}$ -q.t.p. $x \in \mathbb{R}$,

$$(1) \quad f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t) \, dt.$$

Essa afirmação tem um sabor de continuidade: o valor de f no ponto x é o limite das *médias* de f em intervalos arbitrariamente pequenos e contendo o ponto x .

Se f for de fato contínua no ponto x , então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - x| < \delta \implies |f(t) - f(x)| < \epsilon.$$

Então

$$\frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t) \, dt - f(x) = \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} (f(t) - f(x)) \, dt,$$

logo se $|h| < \delta$ e $h > 0$ (argumento similar se $h < 0$), tem-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t) \, dt - f(x) \right| &\leq \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} |f(t) - f(x)| \, dt, \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \epsilon \, dt = \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova (1) neste caso.

Portanto (1) vale em todo ponto de continuidade de f . Se f for (localmente) integrável à *Riemann*, pelo teorema de Riemann, f seria contínua em quase todo ponto, e a conclusão seguiria imediatamente.

Porém, como μ é uma medida finita e diferenciável, a função f é (apenas) *Lebesgue* integrável, e o argumento acima não pode estabelecer nossa conclusão. Acontece que neste cenário bem mais geral, (1) ainda vale para m-q.t.p. $x \in \mathbb{R}$, por um resultado bem mais profundo, o teorema de diferenciação de Lebesgue (que será discutido em outro momento).

Exemplo 2. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida. Se μ é diferenciável em relação à medida de Dirac δ_a , onde $a \in \Omega$, então

$$\mu = c \delta_a$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

De fato, se f é a derivada de Radon-Nikodym de μ com respeito a δ_a , então para todo $E \in \mathcal{F}$,

$$\mu(E) = \int_E f d\delta_a = \int_{\Omega} f \mathbf{1}_E d\delta_a = f(a) \mathbf{1}_E(a) = f(a) \delta_a(E),$$

portanto $\mu = f(a) \delta_a$.

Lema 1. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ um espaço de medida positiva e $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ uma função mensurável como antes.

- (i) Se $m(E) = 0$ então $m_f(E) = 0$.
- (ii) Se $m_f \perp m$ então $f = 0$ m-q.t.p.
- (iii) Se $\mu_1 \perp m$ e $\mu_2 \perp m$ então dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) \perp m$$

sempre que a medida do lado esquerdo esteja bem definida.

Demonstração. (i) Se $m(E) = 0$, então claramente $\mathbf{1}_E = 0$ m-q.t.p. Portanto

$$m_f(E) = \int_E f dm = \int_{\Omega} f \mathbf{1}_E dm = 0.$$

- (ii) Se $m_f \perp m$, então existe uma partição $\Omega = A \sqcup A^c$ tal que

$$m|_A = 0, \quad m_f|_{A^c} = 0.$$

Pelo item (i),

$$m|_A = 0 \implies m_f|_A = 0,$$

logo $m_f = 0$, e daí, $f = 0$ m-q.t.p.

- (iii) Se $\mu_1 \perp m$ e $\mu_2 \perp m$, então existem A_1, A_2 tais que

$$\begin{aligned} m|_{A_1} &= 0 & \mu_1|_{A_1^c} &= 0 \\ m|_{A_2} &= 0 & \mu_2|_{A_2^c} &= 0. \end{aligned}$$

Seja $A = A_1 \cup A_2$. Como m é positiva, $m(A) = 0$, logo $\text{supp}(m) \subset A^c$.

Além disso, se $E \in \mathcal{F}$, $E \subset A^c = A_1^c \cap A_2^c$, então $\mu_1(E) = 0$ e $\mu_2(E) = 0$, logo

$$(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2)(E) = 0,$$

mostrando que $\text{supp}(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) \subset A$. □

Definição 2. Seja $\{\mu_n\}$ uma sequência de medidas em $(\Omega, \mathcal{F})$. Dizemos que $\mu_n \rightarrow \mu$ fortemente quando

$$\mu_n(E) \rightarrow \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Lema 2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ um espaço de medida positiva. Suponha que $\mu_n \rightarrow \mu$ fortemente e que*

$$\mu_n^+ \perp m \quad \forall n.$$

Então $\mu \perp m$.

Teorema 3 (Lebesgue–Radon–Nikodym). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ um espaço de medida positiva σ -finito.*

Seja μ uma medida com sinal σ -finita.

Então existe uma única decomposição

$$\mu = m_f + \mu_s$$

onde $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e

$$\mu_s \perp m.$$

Além disso

- *se $\mu \geq 0$ então $f \geq 0$ m-q.t.p. e $\mu_s \geq 0$,*
- *se μ é finita então $f \in L^1(m)$.*

Prova da unicidade. Suponha

$$\mu = m_{f_1} + \nu_1, \quad \nu_1 \perp m$$

e

$$\mu = m_{f_2} + \nu_2, \quad \nu_2 \perp m.$$

Então

$$m_{f_1-f_2} = \nu_2 - \nu_1.$$

O lado esquerdo é absolutamente contínuo em relação a m , enquanto o lado direito é singular. Logo

$$f_1 = f_2 \quad m\text{-q.t.p.}$$

e

$$\nu_1 = \nu_2.$$

□

2. O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE LEBESGUE, RADON, NIKODYM

3. O TEOREMA DE RADON, NIKODYM

4. O TEOREMA DE DECOMPOSIÇÃO DE LEBESGUE

5. A FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

6. APLICAÇÃO EM PROBABILIDADES: ESPERANÇA CONDICIONADA