

INFORMATIVO DA DISCIPLINA

MAT 2614 ou 2615 / 2026.1
TÓPICOS DE ANÁLISE REAL
Teoria da Medida II



DADOS GERAIS

Professor: Silviu Klein
Aulas: 3ª e 5ª das 11h às 13h na sala L856

OBJETIVOS

A disciplina tem por objetivo familiarizar os estudantes com tópicos mais avançados de teoria da medida, que não são normalmente lecionados num curso de medida e integração de um semestre.

O curso será útil para estudantes interessados em análise e EDP, teoria ergódica e até mesmo teoria da probabilidade, além de ser um curso de cultura geral e, portanto, interessante para qualquer aluno de pós graduação com suficiente maturidade matemática.

EMENTA

Medidas com sinal. O teorema de Lebesgue, Radon, Nikodym. Medidas de Radon e o teorema de representação de Riesz-Markov. A métrica de Wasserstein no espaço de medidas de probabilidade. A função maximal de Hardy-Littlewood e o teorema de diferenciação de Lebesgue. Diferenciabilidade de funções absolutamente contínuas. Medida e dimensão de Hausdorff. Medida de Haar.

PRÉ-REQUISITOS

MAT2621 Medida e integração.

MAT2304 (Teoria da Probabilidade I) e MAT2622 (Análise Funcional) são muito úteis, mas não completamente obrigatórios.

PÁGINA DO CURSO

https://silviusklein.github.io/teaching/mat2615_2026.1/main.html

AValiação

Listas de exercícios, valendo 60% da nota final.
Um exame escrito no final do semestre, valendo 40% da nota final.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

[Notas] Notas de aula serão disponibilizadas na página do curso.

Além disso, alguns livros textos recomendados (contendo tópicos do curso) são os seguintes:

[Stein] Elias M. Stein & Rami Shakarchi, Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton Lectures in Analysis, vol III, Princeton University Press.

[Tao] Terence Tao, An Introduction to Measure Theory, AMS.

[Vilani] Cédric Villani, Optimal Transport: Old and New, Springer.

[Halmos] Paul Halmos, Measure Theory, Springer.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

[Viana] Marcelo Viana & Krerley Oliveira, Fundamentos da Teoria Ergódica , SBM.

[Evans] Lawrence Craig Evans & Ronald F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press.

[Schlag] Camil Muscalu & Wilhelm Schlag, Classical and Multilinear Harmonic Analysis, vol I, Cambridge University Press.

TÓPICOS

1. Medidas com sinal

- 1.1. O conceito de medida com sinal
- 1.2. O teorema de decomposição de Hahn
- 1.3. O teorema de decomposição de Jordan

[Notas] Cap.1

2. Os teoremas de Lebesgue, Radon e Nikodym

- 2.1. Relação com uma medida de referência
- 2.2. O teorema de decomposição de Lebesgue, Radon, Nikodym
- 2.3. O teorema de Radon, Nikodym
- 2.4. O Teorema de decomposição de Lebesgue
- 2.5. A função de distribuição acumulada
- 2.6. Aplicação em probabilidades: esperança condicionada

[Notas] Cap. 2

3. O teorema de representação de Riesz-Markov

- 3.1. Espaços de Hausdorff localmente compactos
- 3.2. Medidas de Radon
- 3.3. O teorema de Riesz-Markov
- 3.4. Convergência fraca

[Evans] Cap. 1.8 e 1.9, [Halmos] Cap. X

- 4. O espaço de medidas de probabilidades
 - 4.1. A topologia fraca*
 - 4.2. Teorema Portmanteau
 - 4.3. A metrizabilidade da topologia fraca* (métrica de Levy-Prohorov)
 - 4.4. A distância de Wasserstein e suas propriedades

[Viana] Cap. 2, [Villani] Cap 1.6

- 5. O teorema fundamental do cálculo (parte 1) para a integral de Lebesgue
 - 5.1 O teorema fundamental do cálculo 1 (a versão bebê conforto)
 - 5.2. O lema da cobertura de Vitali
 - 5.3 A função maximal de Hardy-Littlewood
 - 5.4 O teorema de diferenciação de Lebesgue
 - 5.5 Pontos de densidade de Lebesgue; conjunto de Lebesgue de uma função localmente integrável
 - 5.6. Aproximação da identidade

[Stein] Cap. 3.1 e 3.2

- 6. O teorema fundamental do cálculo (parte 2) para a integral de Lebesgue
 - 6.1 O teorema fundamental do cálculo 2 (a versão bebê conforto)
 - 6.2. Funções de variação limitada
 - 6.3. O lema do sol nascente
 - 6.4 Diferenciabilidade de funções absolutamente contínuas
 - 6.5. Comprimento de curvas retificáveis

[Stein] Cap. 3.3 e 4, [Tao] Cap. 1.6

- 7. Medida e dimensão de Hausdorff
 - 7.1. Medida de Hausdorff
 - 7.2. Dimensão de Hausdorff; exemplos; auto similaridade

[Stein] Cap. 7.1 e 7.2, [Evans] Cap. 3

- 8. Medida de Haar
 - 8.1. Existência da medida de Haar
 - 8.2 Unicidade da medida de Haar
 - 8.3 Regularidade da medida de Haar

[Halmos], Cap. XI, XII

- 9. O teorema ergódico via funções maximais* (opcional e sujeito à disponibilidade de tempo)
 - 9.1. Transformações que preservam medida, médias temporais
 - 6.2. O teorema ergódico médio
 - 6.3. O teorema ergódico maximal
 - 6.4. O teorema ergódico de Birkhoff
 - 6.5. Medidas ergódicas

[Stein] Cap. 6.5