

## LISTA 2

## O TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ-MARKOV

**Exercício 1.** Sejam  $\mu$  e  $\nu$  duas medidas num espaço mensurável  $(X, \mathcal{B})$ . Prove que se  $\nu$  é uma medida de Radon e  $\mu \ll \nu$ , então  $\mu$  também é uma medida de Radon.

**Exercício 2.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto, e sejam  $K$  um conjunto compacto e  $U$  um conjunto aberto tais que  $K \subset U$ . Prove que estes dois conjuntos podem ser separados por uma função Lipschitz contínua. Mais precisamente, denotando por  $\delta := d(K, U^c)$ , tem-se  $\delta > 0$  e a função  $f: X \rightarrow [0, 1]$ ,

$$f(x) := \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}$$

é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz  $\leq \frac{1}{\delta}$ . Além disso,  $f = 1$  em  $K$  e  $f = 0$  em  $U^c$ .

**Exercício 3.** Sejam  $X$  um espaço topológico  $\sigma$ -compacto e  $\mu$  uma medida de Borel em  $X$ . Prove que para todo conjunto fechado  $F$ , tem-se

$$\mu(F) = \sup\{\mu(K) : K \subset F \text{ compacto}\}.$$

## O ESPAÇO DE MEDIDAS DE PROBABILIDADES

**Exercício 4.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Prove que o conjunto de medidas de probabilidade com suporte finito é denso em  $\text{Prob}(X)$  relativamente à topologia fraca\*. Em outras palavras, dada  $\mu \in \text{Prob}(X)$ , existe uma sequência de medidas

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{k_n} p_n^i \delta_{x_n^i} \xrightarrow{*} \mu,$$

em que  $p_n^i \geq 0$ ,  $x_n^i \in X$  e  $\sum_{i=1}^{k_n} p_n^i = 1$  para todo  $n$ .

A mesma conclusão vale se  $(X, d)$  for apenas separável. Conclua que neste caso ( $X$  separável),  $\text{Prob}(X)$  também é separável na topologia fraca\*.

**Exercício 5.** Sejam  $(X, \mathcal{B})$  um espaço mensurável,  $\mu$  e  $\nu$  duas medidas em  $X$  e considere  $\pi \in \text{Prob}(X \times X)$ . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $\pi$  é um acoplamento de  $\mu$  e  $\nu$ .
- (ii) Para todos os conjuntos  $A, B \in \mathcal{B}$ , tem-se

$$\pi(A \times X) = \mu(A) \quad \text{e} \quad \pi(X \times B) = \nu(B).$$

- (iii) Para todas as funções mensuráveis  $\phi, \psi: X \rightarrow [0, \infty)$ , tem-se

$$\iint_{X \times X} [\phi(x) + \psi(y)] d\pi(x, y) = \int_X \phi(x) d\mu(x) + \int_X \psi(y) d\nu(y).$$

**Exercício 6.** Sejam  $X, Y$  dois espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  uma função contínua. Prove que se

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \quad \text{em } \text{Prob}(X)$$

então

$$f_*\mu_n \xrightarrow{*} f_*\mu \quad \text{em } \text{Prob}(Y).$$

Conclua que a função

$$\text{Prob}(X) \ni \mu \mapsto f_*\mu \in \text{Prob}(Y)$$

é contínua com respeito à topologia fraca\*.

**Exercício 7.** Complete a prova da desigualdade triangular para a métrica de Wasserstein (veja as notas de aula).

**Exercício 8.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $\mu \in \text{Prob}(X)$ . Denote por  $L^\infty(X, \mathbb{R}^n)$  o espaço (métrico) de funções  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  mensuráveis e limitadas, munido da distância uniforme entre funções. Prove que a aplicação

$$L^\infty(X, \mathbb{R}^n) \ni f \mapsto f_*\mu \in \text{Prob}(\mathbb{R}^n)$$

é Lipschitz contínua quando  $\text{Prob}(\mathbb{R}^n)$  está munido da métrica de Wasserstein (de ordem 1).

O contradomínio  $\mathbb{R}^n$  pode ser trocado por qualquer outro espaço métrico polonês.

#### DIFERENCIAÇÃO V. INTEGRAÇÃO À LEBESGUE

**Exercício 9.** Seja  $\mu$  uma medida (positiva) finita em  $\mathbb{R}^d$ . Defina a função maximal de Hardy-Littlewood por

$$\mathcal{M}\mu(x) := \left\{ \frac{\mu(B)}{m(B)} : B \text{ é uma bola aberta, } x \in B \right\}.$$

Prove a seguinte desigualdade do tipo fraco:

$$m \{x \in \mathbb{R}^d : \mathcal{M}\mu(x) > \lambda\} \leq \frac{3^d}{\lambda} \mu(\mathbb{R}^d)$$

para todo  $\lambda > 0$ .

**Exercício 10.** Prove que a função

$$x^a \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^b} \right) \in \text{BV}[0, 1]$$

se e somente se  $a > b$ , onde  $a$  e  $b$  são dois parâmetros positivos.