

AULA 10: CONJUNTOS PATOLÓGICOS E NÃO PATOLÓGICOS

Começamos com o problema de existência de conjuntos não mensuráveis à Lebesgue.

O paradoxo de Banach-Tarski afirma que dada uma bola sólida unitária B em dimensão 3 ou maior, B pode ser desmontada em um número finito de conjuntos, que podem ser remontados (depois de serem transformados por algumas rotações e translações¹) em *duas* bolas unitárias, dobrando assim o seu volume.

A prova deste resultado usa de maneira essencial o axioma da escolha. Os conjuntos resultados são muito *patológicos*, “dispersões infinitas de pontos”. Necessariamente, eles não são mensuráveis.

Solovay, em 1970, provou a existência de um modelo de teoria dos conjuntos, *sem* o axioma da escolha, para qual *todos* os conjuntos em \mathbb{R} são mensuráveis à Lebesgue.

Portanto, a existência de conjuntos não mensuráveis no espaço Euclidiano depende do sistema axiomático considerado. Neste curso, sempre supomos a validade do axioma da escolha (logo, do lema de Zorn e suas outras consequências). Portanto, em nosso cenário, existem conjuntos não mensuráveis, o que mostraremos abaixo.

Exemplo 1. (de conjunto não mensurável à Lebesgue em \mathbb{R}) Considere a relação de equivalência em \mathbb{R} dada por

$$x \sim y : \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, sejam

$$x + \mathbb{Q} = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$$

a classe de equivalência de x e

$$\mathbb{R}/\sim = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto quociente correspondente.

Como \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , para todo $x \in \mathbb{R}$, sua classe de equivalência $x + \mathbb{Q}$ também é densa em \mathbb{R} , portanto

$$(x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

Pelo axioma da escolha, existe uma função

$$\mathbb{R}/\sim \ni c \mapsto x_c \in [0, 1] \quad \text{tal que } x_c \in (x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \quad \text{para todo } c \in \mathbb{R}/\sim.$$

Considere o conjunto

$$E := \{x_c : c \in \mathbb{R}/\sim\} \subset [0, 1].$$

Provaremos que E não é mensurável. Precisaremos das seguintes propriedades.

■ Valem as inclusões de conjuntos

$$(1) \quad [0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + q) \subset [-1, 2].$$

De fato, dado $y \in [0, 1]$, como as classes de equivalência particionam o espaço \mathbb{R} , ou seja como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}/\sim} c,$$

existe $c \in \mathbb{R}/\sim$ tal que $y \in c$.

¹Ou seja, por transformações rígidas, que não mudam o volume de conjuntos mensuráveis.

Por outro lado, por definição (ou melhor, por escolha) $x_c \in (x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Então, y e x_c pertencem a mesma classe de equivalência c , logo, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$y = x_c + q \in E + q.$$

Além disso, $q = y - x_c$, então $|q| = |y - x_c| \leq 1$, portanto $y \in E + q$, com $q \in [-1, 1]$.

Ademais, como $E \subset [0, 1]$, seque que para todo $q \in [-1, 1]$, temos $E + q \subset [-1, 2]$, finalizando a prova de (1).

- Se $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ são diferentes, então os conjuntos $E + q_1$ e $E + q_2$ são disjuntos. De fato, se $z \in E + q_1 \cap E + q_2$, então existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}/\sim$ tais que

$$z = x_{c_1} + q_1 = x_{c_2} + q_2.$$

Logo, $x_{c_1} - x_{c_2} = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, ou seja, x_{c_1} e x_{c_2} pertencem a mesma classe de equivalência. Assim, $c_1 = c_2$, então $x_{c_1} = x_{c_2}$, e daí, $q_1 = q_2$.

Suponha por contradição que E seja mensurável. Então, para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ (que é um conjunto enumerável infinito), $E + q$ também é mensurável, e $m(E + q) = m(E)$.

Além disso, a união enumerável $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + q)$ é mensurável e, pela propriedade (1), sua medida satisfaz as desigualdades

$$0 < 1 = m([0, 1]) \leq m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + q)\right) \leq m([-1, 2]) = 3 < \infty,$$

que está em contradição com

$$m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + q)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(E) = 0 \text{ ou } +\infty,$$

dependendo de $m(E)$ ser zero ou positivo.

Concluimos que E não pode ser mensurável.

Acabamos o capítulo sobre conjuntos mensuráveis à Lebesgue com o critério de mensurabilidade de Carathéodory. Intuitivamente, este critério afirma que um conjunto é mensurável se e somente se não é patológico, no sentido que não contém pedaços que podem “ampliar a medida de outros conjuntos (como acontece no paradoxo de Banach-Tarski).

Teorema 2. (o critério de mensurabilidade de Carthéodory) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) E é mensurável à Lebesgue.
- (ii) Para toda caixa B , temos

$$|B| = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E).$$

- (iii) Para todo conjunto elementar A , temos

$$m(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

- (iv) Para todo conjunto aberto U , temos

$$m(U) = m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E).$$

- (v) Para todo conjunto S , temos

$$m^*(S) = m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E).$$

Demonstração. Como a medida exterior de Lebesgue é subaditiva, para todo conjunto S , sempre temos

$$m^*(S) \leq m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E),$$

então, somente as desigualdades “ \geq ” são relevantes neste contexto.

(i) \implies (ii) Como E é mensurável e B é uma caixa (então, é um conjunto mensurável), $B \cap E$, $B \setminus E$ também são mensuráveis. Além disso, $B = (B \cap E) \sqcup (B \setminus E)$, logo

$$|B| = m(B) = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E).$$

(ii) \implies (iii) Seja A um conjunto elementar. Então, A pode ser escrito como uma união finita de caixas (quase) disjuntas:

$$A = \bigcup_{n=1}^N B_n, \quad \text{logo} \quad m(A) = \sum_{n=1}^N |B_n|.$$

Portanto, para todo $1 \leq n \leq N$,

$$|B_n| = m^*(B_n \cap E) + m^*(B_n \setminus E),$$

e somando por n ,

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{n=1}^N |B_n| = \sum_{n=1}^N m^*(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^N m^*(B_n \setminus E) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^N B_n \cap E\right) + m^*\left(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus E\right) \quad \text{pela subaditividade da medida exterior} \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E). \end{aligned}$$

(iii) \implies (iv) A prova é similar a anterior. Seja U um conjunto aberto. Pelo Lema 3 da aula 7, U pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Pelo Lema 2 da aula 7,

$$m(U) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$,

$$|B_n| = m^*(B_n \cap E) + m^*(B_n \setminus E),$$

e somando por n ,

$$\begin{aligned} m(U) &= \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n \setminus E) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap E\right) + m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus E\right) \quad \text{pela } \sigma\text{-subaditividade da medida exterior} \\ &= m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E). \end{aligned}$$

(iv) \implies (v) Seja $S \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto qualquer. Pela regularidade da medida exterior,

$$m^*(S) = \inf\{m(U) : U \supset S \text{ aberto}\}.$$

Para cada aberto $U \supset S$, temos que

$$\begin{aligned} m^*(U) &= m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E) \\ &\geq m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E) \quad \text{pela monotonicidade da medida exterior.} \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todo tal aberto U , concluímos que

$$m^*(S) \geq m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E).$$

(iv) \implies (v) Supomos, por enquanto, que E seja limitado; então, em particular, sua medida exterior é finita: $m^*(E) < \infty$.

Vamos provar que E é quase aberto. Seja $\epsilon > 0$. Usando a regularidade da medida exterior, existe $U \subset E$ aberto tal que

$$m^*(U) \leq m^*(E) + \epsilon.$$

Como, por hipótese,

$$m^*(U) = m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E) = m^*(E) + m^*(U \setminus E),$$

e como $m^*(E) < \infty$, concluímos que

$$m^*(U \setminus E) = m^*(U) - m^*(E) \leq \epsilon,$$

mostrando que E é quase aberto, logo mensurável.

Um conjunto não necessariamente limitado E pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos limitados

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \quad \text{onde } E_n := E \cap [-n, n]^d.$$

Verificamos que o argumento anterior é aplicável ao conjunto E_n , ou seja, que E_n satisfaz

$$m^*(F) \geq m^*(F \cap E_n) + m^*(F \setminus E_n)$$

para todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} m^*(F) &= m^*(F \cap [-n, n]^d) + m^*(F \setminus [-n, n]^d) \quad (\text{já que } [-n, n]^d \text{ é mensurável}) \\ &= m^*(F \cap [-n, n]^d \cap E) + m^*(F \cap [-n, n]^d \setminus E) + m^*(F \setminus [-n, n]^d) \\ &\quad (\text{pela hipótese sobre } E, \text{ com } S := F \cap [-n, n]^d) \\ &\geq m^*(F \cap ([-n, n]^d \cap E)) + m^*(F \setminus ([-n, n]^d \cap E)) \\ &= m^*(F \cap E_n) + m^*(F \setminus E_n). \end{aligned}$$

A última desigualdade segue da subaditividade da medida exterior e da identidade geral entre conjuntos

$$(A \cap B \setminus C) \cup (A \setminus B) = A \setminus (B \cap C).$$

O caso de conjuntos limitados é assim aplicável a cada conjunto E_n , provando a sua mensurabilidade, e com isso, a mensurabilidade de $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. \square

O critério de Carathéodory será muito importante para estender a construção da medida de Lebesgue em outros contextos, ou seja, para abstractizar este procedimento. A ideia é, dado um espaço X qualquer, escolher seus subconjuntos mensuráveis *básicos* (análogos a caixas no espaço Euclidiano) e definir uma medida natural para estes conjuntos. A medida exterior de qualquer subconjunto pode ser posteriormente definida como o custo ínfimo necessário para cobri-lo por uma união enumerável de conjuntos básicos. E finalmente, o critério de Carathéodory pode ser usado como definição do conceito de mensurabilidade, por exemplo, $E \subset X$ é mensurável se item (ii) do teorema anterior vale para todo conjunto básico B em X .