AULA 11: UMA PRÉVIA DA INTEGRAL DE LEBESGUE

Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiremos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mathrm{m}(x) = \int f\,,$$

a integral de f com respeito a medida de Lebesgue, ou, simplesmente, a integral de Lebesgue.

Nem todas as funções podem ser integradas; aquelas que podem ser integradas são chamadas funções mensuráveis à Lebesgue.

O conceito de integração está relacionado ao da soma. Vamos considerar o conceito de somabilidade com mais atenção.

Somas infinitas (séries). Uma série infinita $\sum_{n\geq 1} c_n$ é somável se a sua sequência de somas parciais $S_N := \sum_{n=1}^{N} c_n$ converge. Vamos considerar duas situações especiais relevantes na construção da integral de Lebesgue.

- Soma infinita sem sinal

Suponha que $c_n \in [0,\infty]$ para todo $n \geq 1$, isto é, $\sum_{n\geq 1} c_n$ é uma série infinita *sem sinal.* Neste caso, a soma desta série existe, embora possa ser infinita, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n = \sup\left\{ \sum_{n\in\mathcal{F}} c_n \colon \mathcal{F} \subset \mathbb{N} \text{ finito} \right\}.$$

- Soma infinita absolutamente somável

Uma série $\sum_{n\geq 1} c_n$ é chamada *absolutamente somável* se a série sem sinal $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é finita (o que, em particular, implica a somabilidade da série $\sum_{n\geq 1} c_n$).

Notação. Para um número $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ := \begin{cases} c & \text{se } c \geq 0 \\ 0 & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- := \begin{cases} 0 & \text{se } c \geq 0 \\ -c & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{-c, 0\}\,.$$

Note que

$$c^+,\, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-\,.$$

Com essas notações, uma série $\sum_{n\geq 1} c_n$ é absolutamente somável se e somente se as séries sem sinais $\sum_{n\geq 1} c_n^+$ e $\sum_{n\geq 1} c_n^-$ são finitas. Neste caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-\,.$$

Portanto, a somabilidade (absoluta) de séries pode ser reduzida ao caso de séries sem sinais.

Construção da integral de Lebesgue. Definiremos este conceito em vários passos.

1. Seja $f = \mathbf{1}_E$ a função indicadora de um conjunto mensurável E. Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \mathrm{m}(E) \, .$$

Mais geralmente, suponha que $f = \sum_{i=1}^k c_1 \mathbf{1}_{E_i}$ seja uma combinação linear de funções indicadoras de conjuntos mensuráveis E_i, com coeficientes $c_i \geq 0$ para todo $i \in [k] := \{1, \dots, k\}$. Este tipo de função será chamada de função simples. Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \sum_{i=1}^k c_i \, \mathrm{m}(E_i) \, .$$

Esta definição corresponde à nossa intuição geométrica da integral de uma função não negativa como o volume abaixo do gráfico da função. Também, por construção, é uma operação linear (como deveria ser).

2. Suponha que $f \geq 0$ possa ser aproximada (de uma maneira razoável) por funções *simples*. Chamamos tal função "mensurável à Lebesgue". Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \sup \left\{ \int_{R^d} s \, d\mathrm{m} \colon s \leq f, \ s \text{ é uma função simples} \right\} \, .$$

3. Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, então $|f| \geq 0$. Escreva

$$f = f^+ - f^- \, ,$$

onde

$$f^+(x) := f(x)^+ \quad \text{e} \quad f^-(x) := f(x)^- \, .$$

A função f é chamada *absolutamente integrável* se f^+ e f^- são funções mensuráveis (logo, $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também) e

$$\int_{R^d} |f| \, d\mathrm{m} < \infty \, .$$

Neste caso, defina

$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \int_{R^d} f^+ \, d\mathrm{m} - \int_{R^d} f^- \, d\mathrm{m} \, .$$

A seguir, faremos uma apresentação detalhada de cada passo da construção acima.

Integração de funções simples

Começamos com a definição e as propriedades básicas de funções simples.

Definição 1. Uma função $s \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é dita *simples* se

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} \, ,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ e E_i são conjuntos mensuráveis à Lebesgue para todo $i \in [k]$.

Ademais, $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ é uma função simples *sem sinal* se os coeficientes $c_i \in [0, +\infty]$ para todo $i \in [k]$.

Notação. Vamos fazer as seguintes *convenções* naturais sobre operações algébricas que envolvem $+\infty$.

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty \\ c \cdot \infty &= \infty, \text{ se } c > 0 \\ 0 \cdot \infty &= 0 \\ \infty \cdot c &= \infty, \text{ se } c > 0 \\ \infty \cdot 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Observação 1. Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples. Os conjuntos mensuráveis $E_1, \dots, E_k$ não precisam ser disjuntos. Porém, se for conveniente, pode-se supor que eles são disjuntos e até mesmo, que eles formam uma *partição* do espaço $\mathbb{R}^d$.

De fato, se (por simplicidade) $k = 2$, logo $s = c_1 \mathbf{1}_{E_1} + c_2 \mathbf{1}_{E_2}$, como os dois conjuntos E_1 e E_2 determinam uma partição de espaço $\mathbb{R}^d$ em quatro subconjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &= (E_1 \setminus E_2) \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1 \cup E_2)^\complement \\ &= (E_1 \cap E_2^\complement) \sqcup (E_2 \cap E_1^\complement) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1^\complement \cap E_2^\complement)\,, \end{aligned}$$

segue que

$$s(x) = c_1 \mathbf{1}_{E_1}(x) + c_2 \mathbf{1}_{E_2}(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2^\complement \\ c_2 & \text{se } x \in E_2 \cap E_2^\complement \\ c_1 + c_2 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2 \\ 0 & \text{se } x \in E_1^\complement \cap E_2^\complement \end{cases}$$

$$= c_1\, \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2^\complement} + c_2\, \mathbf{1}_{E_2 \cap E_1^\complement} + (c_1 + c_2)\, \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} + 0\, \mathbf{1}_{E_1^\complement \cap E_2^\complement}\,.$$

O mesmo argumento vale com qualquer número k de conjuntos E_i, $i \in [k]$.

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, vamos denotar por $E^+ := E$ e por $E^- := E^\complement$. Então, com estas notações, os conjuntos $E_1, \dots, E_k$ determinam uma partição

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+,-\}} E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}$$

em 2^k conjuntos mensuráveis, e, claramente,

$$s = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+,-\}} c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}\, \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}}$$

para alguns coeficientes $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$.

Note que se $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, então, claramente $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k} \in [0, \infty]$.

Proposição 1. *(propriedades básicas de funções simples) Sejam s e σ duas funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Então,*

(1) $s + \sigma$ e cs são funções simples.
(2) $s \cdot \sigma$ é uma função simples.
(3) $s^+, s^-, |s|$ são funções simples.

Demonstração. O primeiro item é óbvio. O segundo segue do fato de que $\mathbf{1}_E\, \mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{E \cap F}$. Para provar o terceiro, seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos mensuráveis E_i, $i \in [k]$ são *disjuntos.* Então, evidentemente,

$$s^\pm = \sum_{i=1}^k c_i^\pm\, \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad |s| = \sum_{i=1}^k |c_i|\, \mathbf{1}_{E_i}\,,$$

que são funções simples. $\square$

Definição 2. (da integral de Lebesgue de uma função simples)

Seja $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples *sem sinal*, então $c_i \in [0, \infty]$ para todo $i \in [k]$. Definimos a integral de s por

$$\int_{R^d} s \, d\mathrm{m} := \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathrm{m}(E_i) \,,$$

com as convenções acima mencionadas para operações com ∞.

Ademais, uma função simples qualquer é dita *absolutamente integrável* se

$$\int_{R^d} |s| \; d\mathrm{m} < \infty \,.$$

Neste caso, definimos a integral de s por

$$\int_{R^d} s \, d\mathrm{m} := \int_{R^d} s^+ \, d\mathrm{m} - \int_{R^d} s^- \, d\mathrm{m} \,.$$

Observação 2. A integral de uma função simples sem sinal (e então também a de uma função absolutamente integrável) é bem definida. De fato, dadas duas representações da função simples sem sinal s,

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathbf{1}_{F_j} \,,$$

onde $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in [0, \infty]$, temos que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathrm{m}(E_i) = \sum_{j=1}^{l} d_j \, \mathrm{m}(F_j) \,.$$

Provamos isso em duas etapas. Em primeiro lugar, supomos que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ sejam disjuntos dois a dois. Portanto, $\{E_i \cap F_j\}_{(i,j) \in [k] \times [l]}$ também são disjuntos. Pela Observação 1, sem perda da generalidade, podemos supor que

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \bigcup_{j=1}^{l} F_j = \mathbb{R}^d \,.$$

Portanto, para todo $i \in [k]$ e $j \in [l]$,

$$E_i = \bigsqcup_{j=1}^{l} (E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad F_j = \bigsqcup_{i=1}^{k} (E_i \cap F_j) \,,$$

logo

$$\mathrm{m}(E_i) = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad \mathrm{m}(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \,.$$

Note que se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ e se x pertence a esta interseção, então $c_i = s(x) = d_j$. Por outro lado, se $E_i \cap F_j = \emptyset$, então $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = 0$. Logo, para todo $(i, j) \in [k] \times [l]$, tem-se

$$c_i \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} c_i \,\mathrm{m}(E_i) &= \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{l} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d_j \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j)\\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} d_j \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{l} d_j \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{l} d_j \,\mathrm{m}(F_j)\,.\end{aligned}$$

Se $\{E_i\}_{i\in[k]}$ não são disjuntos, podemos substituí-los por conjuntos disjuntos. De fato, pela Observação 1,

$$\begin{aligned}s &= \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}\\ &= \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\{+,-\}} \left(c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k}\right) \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1}\cap\ldots\cap E_k^{\alpha_k}}\,.\end{aligned}$$

Ademais, como $c_i^- = 0$ para todo $i \in [k]$, pois $c_i \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\{+,-\}} \left(c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k}\right) \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) =\\ &\quad= \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\{+,-\}} c_1^{\alpha_1} \,\mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \ldots + \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\{+,-\}} c_k^{\alpha_k} \,\mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right)\\ &\quad= \sum_{\alpha_1=+,\,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in\{+,-\}} c_1 \,\mathrm{m}\left(E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \ldots\\ &\quad+ \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\in\{+,-\},\,\alpha_k=+} c_k \,\mathrm{m}\Big(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k\Big)\\ &\quad= c_1 \mathrm{m}(E_1) + \ldots + c_k \mathrm{m}(E_k)\,,\end{aligned}$$

assim estabelecendo que a integral de uma função simples sem sinal está bem definida.

Dizemos que uma propriedade $P(x)$ vale para quase todo ponto (abreviado q.t.p.) $x \in \mathbb{R}^d$ se

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon P(x) \text{ não vale}\right\} = 0\,.$$

Por exemplo, dada uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, a afirmação $f = 0$ q.t.p. significa $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$, ou seja,

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\right\} = 0\,.$$

Além disso, para duas funções f e g, a afirmação $f = g$ q.t.p. significa

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq g(x)\right\} = 0\,.$$

Filosofia de Lebesgue: Conjuntos de medida zero não importam em teoria da medida, ou seja, uma afirmação válida em q.t.p. é suficientemente boa.

Definição 3. O suporte (no sentido de teoria da medida) de uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é o conjunto:

$$\mathrm{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\}\,.$$

O seguinte resultado resume as propriedades básicas da integral de uma função simples sem sinal.

Proposição 2. *Sejam* $s, \sigma \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ *duas funções simples sem sinal, e seja* $c \in [0, \infty]$. *Então,*

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) \, \mathrm{dm} = \int_{\mathbb{R}^d} s \, \mathrm{dm} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, \mathrm{dm}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (cs) \, \mathrm{dm} = c \int_{\mathbb{R}^d} s \, \mathrm{dm} \, .$$

(ii) (finitude)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, \mathrm{dm} < \infty \quad \textit{se e somente se} \quad s < \infty \textit{ q.t.p. e } \mathrm{m} \left(\mathrm{supp}(f) \right) < \infty \, .$$

(iii) (nulidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, \mathrm{dm} = 0 \quad \textit{se e somente se} \quad s = 0 \textit{ q.t.p.}$$

(iv) (monotonicidade) Se $s \le \sigma$ *q.t.p., então* $\displaystyle\int s \le \int \sigma$.

(v) (equivalência) Se $s = \sigma$ *q.t.p., então* $\displaystyle\int s = \int \sigma$.

Demonstração. A linearidade é óbvia por definição.

$\boxed{\text{ii}}$ Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples sem sinal. Podemos supor que $c_i \in (0, \infty]$ para todo $i \in [k]$ e que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos. Então,

$$\mathrm{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i \, .$$

Vamos começar com a implicação oposta.

Como $\mathrm{m} \left(\mathrm{supp}(f) \right) < \infty$, temos que $\mathrm{m}(E_i) < \infty$ para todo $i \in [k]$.

Como $s < \infty$ q.t.p., se para algum $j \in [k]$, $c_j = \infty$, então $\mathrm{m}(E_j) = 0$, logo $c_j \mathrm{m}(E_j) = 0$.

Para todos os outros índices i, temos $c_i \, \mathrm{m}(E_i) < \infty$. Portanto, $\displaystyle\int s = \sum_{i=1}^k c_i \mathrm{m}(E_i) < \infty$.

Provamos a implicação direta. Como $\displaystyle\int s = \sum_{i=1}^k c_i \mathrm{m}(E_i) < \infty$, e como $c_i > 0$ para todo $i \in [k]$, necessariamente $\mathrm{m}(E_i) < \infty$, logo

$$\mathrm{m} \left(\mathrm{supp}(f) \right) = \mathrm{m} \left(\bigcup_{i=1}^k E_i \right) = \sum_{i=1}^k \mathrm{m}(E_i) < \infty \, .$$

Além disso, se para algum índice j temos $c_j = \infty$, como $c_j \, \mathrm{m}(E_j) \le \displaystyle\int s < \infty$, então necessariamente $\mathrm{m}(E_j) = 0$. Portanto,

$$\{x \colon s(x) = \infty\} = \{x \colon \text{ existe } \; j \in [k] \, , \; x \in E_j \; \text{ e } \; c_j = \infty\} = \bigcup_{j \colon c_j = \infty} E_j \, ,$$

logo

$$\mathrm{m} \left(\{x \colon s(x) = \infty\} \right) = 0 \, .$$

$\boxed{\text{iii}}$ Como no item anterior, escrevemos $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, com $c_i > 0$ e E_i disjuntos, logo

$$\mathrm{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^{k} E_i\,.$$

Se $s = 0$ q.t.p., então $\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = 0$, logo $\mathrm{m}(E_i) = 0$ para todo $i \in [k]$, e daí,

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i) = 0\,.$$

Por outro lado, se

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i) = 0\,,$$

para todo $i \in [k]$ temos que $c_i\, \mathrm{m}(E_i) = 0$, e como $c_i > 0$, tem-se $\mathrm{m}(E_i) = 0$, mostrando que

$$\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i) = 0\,,$$

isto é, $s = 0$ q.t.p.

$\boxed{\text{iv}}$ Suponha que $s \le \sigma$ q.t.p.. Pela Observação 1, podemos representar essas funções como

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathbf{1}_{F_j}\,,$$

onde $\{E_i\}_{i\in[k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j\in[l]}$ são *partições* do espaço $\mathbb{R}^d$. Portanto, semelhante argumento ao da Observação 2, implica

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)$$

$$\int \sigma = \sum_{j=1}^{l} d_j\, \mathrm{m}(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d_j\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)\,.$$

Dados $i \in [k]$ e $j \in [l]$, ou $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = 0$, e neste caso $c_i\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = d_j\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)$, ou $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) > 0$, e neste caso, como $s \le \sigma$ q.t.p., necessariamente temos $c_i \le d_j$, logo $c_i\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \le d_j\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)$. Segue que $\displaystyle\int s \le \int \sigma$.

Finalmente, item (v) é uma consequência imediata da monotonicidade da integral. □

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de funções simples com sinal.

Proposição 3. *Dadas $s, \sigma \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções simples absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$, tem-se*

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma)\, d\mathrm{m} = \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m} \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^d} (cs)\, d\mathrm{m} = c \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m}\,.$$

(ii) (monotonicidade) Se $s \le \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s \le \int \sigma$.

(iii) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s = \int \sigma$.

Demonstração. Exercício. □