AULA 5: O TEOREMA DE LEBESGUE (CONTINUIDADE V. INTEGRABILIDADE À RIEMANN-DARBOUX)

O tópico principal desta aula é o teorema de Lebesgue sobre a relação entre a integrabilidade à Riemann-Darboux de uma função e sua continuidade. Mostraremos que uma função limitada é integrável à Riemann-Darboux se e somente se for contínua exceto por um conjunto "negligenciável" de pontos de descontinuidade.

Começamos com a definição formal do conceito de conjunto negligenciável.

Lembre-se que um conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$ possui medida de Jordan nula se e somente se a sua medida exterior de Jordan for zero, ou seja, se $\mathrm{m}^{\star,J}(E) = 0$. Equivalentemente, escrevemos: para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar $B \supset E$ tal que $\mathrm{m}(B) \leq \epsilon$.

Portanto, E tem medida de Jordan zero se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número *finito* de intervalos $I_1, \ldots, I_N$ satisfazendo

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{N} |I_n| \leq \epsilon \,.$$

Exemplos importantes de conjuntos com medida de Jordan zero são conjuntos finitos ou o conjunto de Cantor.

Vamos estender esse conceito para uma família maior de conjuntos. A maneira natural (e, na verdade, padrão na teoria da medida) para obter tal extensão é substituir processos finitos por processos *enumeráveis.*

Definição 1. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é dito "negligenciável", ou de medida (de Lebesgue) zero se para todo $\epsilon > 0$ existir uma família *enumerável* de intervalos $\{I_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon \,.$$

O conjunto vazio é um intervalo, então tais famílias enumeráveis de intervalos incluem também famílias finitas de intervalos. Assim, todo conjunto com medida de Jordan zero é, automaticamente negligenciável.

Além disso note que caso E seja negligenciável e $F \subset E$, então F também é negligenciável.

Exemplo 1. Todo conjunto enumerável é negligenciável.

De fato, seja $E := \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável e fixe $\epsilon > 0$.

A seguir, é apresentado um primeiro exemplo do uso do "truque $\frac{\epsilon}{2^n}$". Esta técnica, em suas várias manifestações, será usada repetidamente ao longo do curso.

Para cada índice $n \geq 1$, considere o intervalo

$$I_n := \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}},\, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right) .$$

Então, obviamente,

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \,,$$

mostrando que E é negligenciável.

Em particular, note que o conjunto $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ é negligenciável, enquanto, como mostrado anteriormente, não é mensurável à Jordan (e, por isso, não possui medida de Jordan zero).

Exercício 1. Prove que uma união enumerável de conjuntos negligenciáveis é negligenciável. Use o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$.

Comentário 1. Se for necessário, os intervalos $I_n, n \geq 1$ sempre podem ser escolhidos *abertos*.

De fato, sejam E um conjunto negligenciável, e $\epsilon > 0$. Existe uma cobertura $I_n, n \geq 1$ de E por intervalos, tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon\,.$$

Supondo que os pontos extremos do intervalo I_n sejam a_n e b_n, e usando o mesmo truque $\frac{\epsilon}{2^n}$, considere os intervalos abertos

$$J_n := \left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}},\, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)\,.$$

Então, para todo $n \geq 1$,

$$|J_n| = |I_n| + \frac{\epsilon}{2^n},$$

portanto

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq 2\epsilon\,.$$

O mesmo argumento também mostra que os intervalos $I_n, n \geq 1$ podem ser escolhidos todos fechados, ou todos semiabertos, caso seja útil.

Observação 1. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto *compacto*. Então, E é negligenciável se e somente se E possui medida de Jordan zero.

Em outras palavras, enquanto, em geral, ter medida de Jornal zero é uma propriedade mais forte, no caso de subconjuntos compactos, os dois conceitos são equivalentes.

Seja $\epsilon > 0$, e escolha uma cobertura $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de E por intervalos *abertos*, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon\,.$$

Como E é compacto, existe uma subcobertura *finita* $I_1, \ldots, I_N$ de E, e, evidentemente,

$$\sum_{n=1}^{N} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon\,.$$

Definição 2. Uma propriedade $P(x)$ vale em *quase todo ponto* (abreviado q.t.p.) se o conjunto

$$\{x \colon P(x) \ \text{ não vale}\}$$

for negligenciável.

Exemplo 2. Considere o conjunto $E := \left\{\frac{1}{n} \colon n \geq 1\right\}$ e a sua função indicadora $\mathbf{1}_E \colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Observe que os pontos de descontinuidade da função $\mathbf{1}_E$ são exatamente 0 e $\frac{1}{n}, n \geq 1$, ou seja, um conjunto enumerável de pontos. Portanto, $\mathbf{1}_E$ é contínua em q.t.p.

Teorema 1 (de Lebesgue)**.** *Seja $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável à Riemann-Lebesgue se e somente se f é contínua em q.t.p.*

Antes de começar a demonstração do teorema, vamos estudar o conceito de *oscilação* de uma função, que é relacionado à sua continuidade.

A oscilação de uma função. Seja $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

Definição 3. Se $I \subset [a,b]$ é um intervalo, definimos a *oscilação de f em I* por

$$\begin{aligned}\omega_f(I) &:= \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I\} \\ &= \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)\,.\end{aligned}$$

Observe que $I \subset J \implies \omega_f(I) \leq \omega_f(J)$.

Definição 4. Se $x \in [a,b]$, definimos a *oscilação de f no ponto x* por

$$\omega_f(x) := \inf\left\{\omega_f(I)\colon I \ \text{ intervalo aberto com } \ x \in I\right\}\,.$$

Como a oscilação depende monotonicamente do intervalo, temos que

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0} \omega_f\left((x-\delta, x+\delta)\right)\,.$$

Exercício 2. Prove que f é uniformemente contínua se e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dado um intervalo $I \subset [a,b]$,

$$|I| < \delta \implies \omega_f(I) < \epsilon\,.$$

Além disso, prove que f é contínua no ponto x se e somente se $\omega_f(x) = 0$.

Em consequência, x é um ponto de descontinuidade de f se e somente se $\omega_f(x) > 0$.

Esta caracterização nos permite *quantificar* a descontinuidade de uma função em um ponto, ou seja, medir quão descontinua f é no ponto x, dependendo de quão grande seja a oscilação pontual $\omega_f(x)$.

Considere

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \{x\colon \omega_f(x) > 0\}$$

o conjuntos dos pontos de descontinuidade da função f.

Dado $r > 0$, definimos

$$\mathcal{D}_r := \{x\colon \omega_f(x) \geq r\}$$

o conjunto de pontos com uma “quantidade (ou nível) de descontinuidade”acima de r.

Observe que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n\geq 1} /D_{1/n}\,.$$

Lema 1. *Para todo $r > 0$, o conjunto $\mathcal{D}_r$ é fechado e, portanto, compacto.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}_r$ uma sequência tal que $x_n \to x$. Provaremos que $x \in \mathcal{D}_r$.

Suponha por contradição que $x \notin \mathcal{D}_r$, ou seja, $\omega_f(x) < r$. Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f\left((x-\delta, x+\delta)\right) < r\,.$$

Como $x_n \to x$, existe $N \geq 1$ tal que $x_N \in (x-\delta, x+\delta)$. Ademais, existe um intervalo aberto J contendo x, e suficientemente pequeno tal que $J \subset (x-\delta, x+\delta)$. Portanto,

$$\begin{aligned} r \leq \omega_f(x_N) &= \inf\left\{\omega_f(I)\colon I \ \text{ intervalo aberto com } \ x_N \in I\right\} \\ &\leq \omega_f(J) \leq \omega_f\left((x-\delta, x+\delta)\right) < r\,,\end{aligned}$$

e temos uma contradição. □

Estamos aptos a começar a prova do resultado principal dessa aula.

Demonstração do Teorema 1. $\boxed{\Longleftarrow}$ Suponha que $\mathcal{D}$ seja negligenciável, e tome $\epsilon > 0$.

Escolha um nível de descontinuidade $r > 0$ pequeno, $r < \frac{\epsilon}{b-a}$ será suficiente. Como $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_r$ também é negligenciável. A ideia da prova é *isolar* os pontos com nível de descontinuidades acima ou igual a r em intervalos pequenos, e usar o resto do espaço, onde a oscilação de f é zero ou muito baixa para construir aproximações por funções escada, e, portanto, provar a integrabilidade de f.[1]

Pelo Lema 1, $\mathcal{D}_r$ é compacto, e pela Observação 1 existe uma cobertura finita por intervalos (que podem ser escolhidos disjuntos)

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n \quad \text{com} \quad \sum_{n=1}^{N} |I_n| < \frac{\epsilon}{M-m}\,,$$

onde $m := \inf f$ e $M := \sup f$.

O complemento dessa cobertura pode ser escrito como uma união disjunta de intervalos

$$[a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n =: J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_m\,.$$

Portanto, para cada índice $k = 1, \ldots, m$, e para todo $x \in J_k$, a oscilação pontual de f satisfaz $\omega_f(x) < r$. Isso não necessariamente implica a mesma estimativa para a oscilação de f no intervalo J_k inteiro; porém, existe uma partição finita do intervalo J_k em intervalos menores para os quais a oscilação permanece abaixo de r, como mostra o seguinte lema .

Lema 2. *Seja $J = [c,d]$ um intervalo e suponha que $\omega_f(x) < r$ para todo $x \in J$. Então, existe uma partição $J = J^1 \sqcup \ldots \sqcup J^p$ em intervalos satisfazendo*

$$\omega_f(J^i) < r \qquad \textit{para todo } i = 1, \ldots, p\,.$$

Prova do lema. Usaremos um argumento simples de compacidade. Para cada $x \in J$, como $\omega_f(x) < r$, existe $\delta_x > 0$ tal que, denotando por $I_x := (x - \delta_x, x + \delta_x)$, temos que $\omega_f(I_x) < r$.

A família $\{I_x\}_{x \in J}$ é uma cobertura finita por intervalos abertos do compacto J, portanto existe uma subcobertura finita $I_{x_1}, \ldots, I_{x_q}$.

Resta "tornar disjuntos"esses intervalos, o que pode ser obtido por meios já familiares. Por exemplo, escrevendo

$$[a,b] = ([a,b] \cap I_{x_1}) \sqcup ([a,b] \cap I_{x_2} \setminus I_{x_1}) \sqcup \ldots \sqcup \left([a,b] \cap I_{x_q} \setminus (I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_{q-1}})\right)\,,$$

[1](28 de março de 2020) Aliás, esta é a estratégia usada para a contenção do novo coronavírus pelos países que tiveram mais sucesso nessa luta (por exemplo na Coreia do Sul).

Considere a analogia "pessoas infectadas $\leftrightsquigarrow$ pontos de descontinuidades".

Com um número finito (isto é, relativamente pequeno) de pessoas infectadas, as autoridades públicas podem tomar medidas de isolamento *local*, em pequenas quadras contendo infectados (e suspeitos de ser infectados devido à proximidade física). A vida pode continuar relativamente normal para o resto da cidade (ou do país). Mas com um número alto de infecções e um padrão de transmissão desconhecido, a alternativa é considerar todos potencialmente suspeitos de infecção, e, portanto, isolar a cidade inteira (ou o país inteiro).

No caso do nosso teorema, temos uma informação crucial: o conjunto de pontos de descontinuidade é bem pequeno, negligenciável. Portanto, isolamento local desses pontos funcionará, eventualmente garantindo a integrabilidade da função.

Infelizmente, por causa, pelo menos em parte, da falta total de *dados* sobre a distribuição das pessoas infectadas em países como Brasil (ou EUA), também por causa de outros problemas de ordem estrutural no sistema de saúde—tudo isso devido a uma falta crônica de preparação, à negação da análise científica, das recomendações apresentadas com *antecedência* por organizações de saúde respeitáveis, ou seja, por uma atitude irresponsável, então, criminal dos mais responsáveis para o bem público—hoje a solução restante é isolamento amplo (ou quase total).

segue que cada conjunto da união disjunta acima pode ser particionado em um número finito de subintervalos disjuntos J^i. Cada um destes subintervalos está contido em um determinado intervalo I_{x_l}, portanto, $\omega_f(J^i) \le \omega_f(I_{x_l}) < r$. □

Voltando à demonstração do teorema, pelo lema anterior, e pelo isolamento em intervalos pequenos dos pontos de descontinuidade de f, temos uma partição de $[a, b]$ em intervalos

$$\{K_1, \dots, K_p;\, I_1, \dots, I_N\}$$

tais que

$$\omega_f(K_l) < r \quad \text{para todo } \ l = 1, \dots, p$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{N} |I_n| < \frac{\epsilon}{M - m}\,.$$

Dentamos por

$$m_l := \inf_{x \in K_l} f(x) \quad \text{e} \quad M_l := \sup_{x \in K_l} f(x)$$

e definimos duas funções escada em $[a, b]$ como segue:

$$s(x) := \begin{cases} m_l & \text{se } x \in K_l,\ l = 1, \dots, p \\ m & \text{se } x \in I_j,\ j = 1, \dots, N \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma(x) := \begin{cases} M_l & \text{se } x \in K_l,\ l = 1, \dots, p \\ M & \text{se } x \in I_j,\ j = 1, \dots, N\,. \end{cases}$$

Claramente $s \le f \le \sigma$ e temos

$$\begin{aligned} \int_a^b (\sigma - s) &= \sum_{l=1}^{p} (M_l - m_l)\, |K_l| + \sum_{j=1}^{N} (M - m)\, |I_j| \\ &= \sum_{l=1}^{p} \omega_f(K_l)\, |K_l| + (M - m) \sum_{j=1}^{N} |I_j| \\ &\le r \sum_{l=1}^{p} |K_l| + (M - m)\, \frac{\epsilon}{M - m} \le r\,(b - a) + \epsilon \le 2\epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a integrabilidade à Riemann-Darboux de f.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suponha que f seja integrável à Riemann-Darboux. Como $\mathcal{D} = \bigcup_{n \ge 1} \mathcal{D}_{1/n}$, basta provar que $\mathcal{D}_r$ é negligenciável para todo $r > 0$.

Fixe $r > 0$. Como $\mathcal{D}_r$ é compacto, isso equivale a provar a existência de uma família finita de intervalos $\{I_k\}_{k \in \mathcal{F}}$ (onde $\mathcal{F}$ é um conjunto finito de índices) satisfazendo

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{k \in \mathcal{F}} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon.$$

Como a função f é integrável à Darboux, então existem duas funções escada s e σ tais que $s \le f \le \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) < \epsilon\, r\,. \tag{1}$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^{N} d_k\, \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $c_k \le d_k$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Seja

$$\mathcal{F} := \left\{ k \in \{1, \ldots, N\} : \mathcal{D}_r \cap \mathring{I}_k \neq \emptyset \right\} .$$

Como $\mathcal{D}_r \subset [a, b] = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_N$, temos que

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{k \in \mathcal{F}} I_k \cup \mathcal{N},$$

onde $\mathcal{N}$ é o conjunto finito (portanto, negligenciável) dos pontos extremos dos intervalos I_k.

Resta provar que

$$\sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon .$$

Fixe $k \in \mathcal{F}$ e seja $x \in \mathcal{D}_r \cap \mathring{I}_k$. Então, $\omega_f(x) \geq r$ e, ademais,

$$\omega_f(x) = \inf \left\{ \omega_f(J) : x \in J,\ J \text{ aberto } \right\} \leq \omega_f(\mathring{I}_k) = \sup_{\mathring{I}_k} f - \inf_{\mathring{I}_k} f \leq d_k - c_k ,$$

onde a última desigualdade vale porque $x \in \mathring{I}_k$, então

$$\sup_{\mathring{I}_k} f \leq \sup_{\mathring{I}_k} \sigma = d_k \quad \text{ e } \quad \inf_{\mathring{I}_k} f \geq \inf_{\mathring{I}_k} s = c_k .$$

Concluímos que

$$k \in \mathcal{F} \implies d_k - c_k \geq r .$$

Portanto, usando (1)

$$\begin{aligned} \epsilon r > \int_a^b (\sigma - s) &= \sum_{k \in \mathcal{F}} (d_k - c_k) \, |I_k| + \sum_{k \notin \mathcal{F}} (d_k - c_k) \, |I_k| \geq \sum_{k \in \mathcal{F}} (d_k - c_k) \, |I_k| \\ &\geq r \sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| \ , \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon ,$$

terminando assim a prova do teorema. □