

**AULA 7: CONJUNTOS MENSURÁVEIS À LEBESGUE  
REGULARIDADE EXTERIOR, ESPAÇO DE CONJUNTOS MENSURÁVEIS**

Lembre-se que a medida exterior de um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  é dada por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } B_n \text{ são caixas} \right\}.$$

O seguinte resultado se refere à aproximação por cima da medida exterior de um conjunto qualquer por conjuntos abertos.

**Proposição 1.** (*regularidade exterior*) Dado  $E \subset \mathbb{R}^d$ , temos

$$m^*(E) = \inf \{m^*(U) : U \text{ aberto, } U \supset E\}.$$

*Demonstração.* Como a medida exterior é monótona, temos que  $m^*(E) \leq m^*(U)$  para todo conjunto aberto  $U \supset E$ . Assim,  $m^*(E) \leq \inf \{m^*(U) : U \text{ aberto, } U \supset E\}$ .

Vamos provar a desigualdade oposta. Seja  $\epsilon > 0$ . Pela definição de medida exterior, existem caixas  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  tais que

$$E \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq m^*(E) + \epsilon.$$

Pague mais um  $\epsilon$  para supor que as caixas  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  são abertas. Então, o conjunto

$$U := \bigcup_{n \geq 1} B_n$$

é aberto,  $E \subset U$  e, pela definição de medida exterior aplicada a  $U$ ,

$$m^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq m^*(E) + \epsilon.$$

Tomado  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluímos que  $\inf \{m^*(U) : U \text{ aberto, } U \supset E\} \leq m^*(E)$ . □

Os próximos resultados técnicos serão usados para estabelecer a existência de uma grande classe de conjuntos mensuráveis.

**Caixas quase disjuntas.** Enquanto os intervalos  $(0, 1]$  e  $[1, 2]$  da reta  $\mathbb{R}$  não são disjuntos, a interseção deles, o conjunto  $\{0\} \subset \mathbb{R}$  é trivial do ponto de vista da teoria da medida. Similarmente, caixas em  $\mathbb{R}^2$  que se intersectam somente ao longo do um lado, enquanto não são tecnicamente disjuntas, para todos os fins práticos, se comportam como se fossem disjuntas. Vamos formalizar esta ideia na seguinte definição.

**Definição 1.** Duas caixas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  são ditas *quase disjuntas* se seus interiores são disjuntos.

**Lema 1.** Se  $B_1, \dots, B_N$  são caixas quase disjuntas duas à duas, então

$$m \left( \bigcup_{n=1}^N B_n \right) = \sum_{n=1}^N |B_n|.$$

*Demonstração.* Usaremos o fato de que a medida de Jordan de um conjunto mensurável à Jordan  $E$  é igual a do seu interior  $\text{int}(E)$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |B_n| &= \sum_{n=1}^N |\text{int}(B_n)| = m\left(\bigcup_{n=1}^N \text{int}(B_n)\right) \quad \text{já que os interiores das caixas são disjuntos} \\ &= m\left(\text{int}\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.** Se  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ , onde  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  são caixas quase disjuntas duas à duas, então

$$(1) \quad m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|.$$

Em particular, se

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n,$$

onde as caixas  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  e  $\{B'_n\}_{n \geq 1}$  são, respectivamente, quase disjuntas duas à duas, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |B'_n|.$$

*Demonstração.* Pela definição da medida exterior,

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|.$$

Vamos provar a desigualdade oposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |B_n|.$$

Seja  $N \geq 1$  e considere a união finita  $\bigcup_{n=1}^N B_n \subset E$ . Então, pelo lema anterior,

$$\sum_{n=1}^N |B_n| = m\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq m^*(E).$$

Portanto, para todo  $N \geq 1$ ,

$$\sum_{n=1}^N |B_n| \leq m^*(E),$$

e tomando  $N \rightarrow \infty$ , concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq m^*(E),$$

assim finalizando a prova do lema. □

**Exemplo 1.** Como  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$ , temos (o fato já estabelecido por outro meio) que

$$m^*(\mathbb{R}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 1 = +\infty.$$

**Lema 3.** *Todo conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^d$  pode ser escrito como uma união enumerável de caixas disjuntas e fechadas  $\{B_n\}_{n \geq 1}$ .*

*Demonstração.* A ideia é usar a malha diádica do espaço euclidiano. Vamos considerar o caso unidimensional  $d = 1$ . O caso multidimensional pode ser tratado analogamente.

Defina os intervalos diádicos

$$Q_{i,n} := \left[ \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right] \quad n \geq 0, i \in \mathbb{Z},$$

onde o índice  $n$  sera referido como “a geração” a qual  $Q_{i,n}$  pertence.

Note que  $|Q_{i,n}| = \frac{1}{2^n}$ . Então, dado  $n \geq 0$ , a família

$$\{Q_{i,n} : i \in \mathbb{Z}\}$$

de intervalos diádicos de geração  $n$  representa a malha diádica de tamanho  $\frac{1}{2^n}$ .<sup>1</sup>

Note também que a família

$$\{Q_{i,n} : i \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$$

de todos os intervalos diádicos, de quaisquer geração, é enumerável.

As seguintes propriedades dos intervalos diádicos serão usadas na prova do lema, e são fáceis de verificar.

- (1) Dado  $n \geq 0$ , os intervalos diádicos  $\{Q_{i,n} : i \in \mathbb{Z}\}$  de geração  $n$  são quase disjuntos, fechados e cobrem o espaço  $\mathbb{R}$ .
- (2) Cada intervalo diádico de geração  $n \geq 1$  está contido em um intervalo “pai” de geração  $n - 1$ .
- (3) Se  $Q, Q'$  são quaisquer intervalos diádicos, de quaisquer gerações, então, ou eles são quase disjuntos, ou um deles contém o outro (isto é, um é o “antepassado” do outro).

Afirmamos que dado um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^d$ , tem-se

$$(2) \quad U = \bigcup \{Q : Q \text{ intervalo diádico}, Q \subset U\}.$$

De fato, evidentemente, a união no lado direito está contida em  $U$ , então basta provar a inclusão oposta.

Seja  $x \in U$ . Como  $U$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $(x - r, x + r) \subset U$ . Já que  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que existe  $N$  tal que  $\frac{1}{2^N} < r$ . Usaremos a malha diádica de tamanho  $\frac{1}{2^N}$ , isto é, pensaremos em  $\{Q_{i,N} : i \in \mathbb{Z}\}$  como uma régua com unidade de medida  $\frac{1}{2^N}$ .

Mais precisamente, os intervalos diádicos de geração  $N$  cobrem o espaço  $\mathbb{R}$  inteiro, então existe  $Q$ , um intervalo diádico de geração  $N$  tal que  $x \in Q$ . Mas como  $|Q| = \frac{1}{2^N} < r$ , segue que  $Q \subset (x - r, x + r)$ . Então,  $x \in Q \subset (x - r, x + r) \subset U$ , estabelecendo assim (2).

A representação do conjunto  $U$  dada por (2) ainda não é o que precisamos, pois os intervalos incluídos não são quase disjuntos: com cada intervalo diádico  $Q \subset U$ , incluímos também todos os seus descendentes. A solução é, então, considerar apenas os intervalos diádicos maximais que estão contidos em  $U$ .

De fato, chamamos um intervalo diádico  $Q^*$  *maximal* em relação à inclusão se, sempre que  $Q^* \subset Q \subset U$ , onde  $Q$  é diádico, temos  $Q^* = Q$ .

Pelo Lema de Zorn, para todo intervalo diádico  $Q \subset U$ , existe um intervalo diádico maximal  $Q^* \subset U$  tal que  $Q \subset Q^*$ . Note também que se  $Q_1^*, Q_2^* \subset U$  são intervalos diádicos maximais, então, ou eles são quase disjuntos, ou são iguais.

<sup>1</sup>Em dimensão maior, a malha considerada consiste em produtos cartesianos de intervalos diádicos.

Concluimos o seguinte

$$U = \bigcup \{Q^* : Q^* \text{ intervalo diádico maximal } \subset U\},$$

que, de fato, é uma união enumerável de intervalos fechados e quase disjuntos.  $\square$

O seguinte exercício é uma amostra relativamente simples de uma propriedade bem mais geral e forte da medida (exterior) de Lebesgue. O resultado enunciado neste exercício será utilizado em breve como uma ferramenta técnica.

**Exercício 1.** Sejam  $K, L \subset \mathbb{R}^d$  dois conjuntos compactos e disjuntos. Então,

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L).$$

O próximo teorema estabelece a existência de uma coleção bem ampla e topologicamente rica de conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

**Teorema 2.** (*existência de conjuntos mensuráveis*)

(i) Cada conjunto aberto é mensurável à Lebesgue.

(ii) Cada conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.

(iii) Cada conjunto negligenciável é mensurável à Lebesgue.

(iv) O conjunto vazio  $\emptyset$  é mensurável à Lebesgue.

(v) Se  $E \subset \mathbb{R}^d$  é mensurável à Lebesgue, então  $E^c = \mathbb{R}^d \setminus E$  também é mensurável.

(vi) Se  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  são mensuráveis à Lebesgue, então  $\bigcup_{n \geq 1} E_n$  também é mensurável.

(vii) Se  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  são mensuráveis à Lebesgue, então  $\bigcap_{n \geq 1} E_n$  também é mensurável.

*Demonstração.* Itens (i) e (iv) são óbvios, item (iii) já foi provado, e item (vii) é uma consequência dos itens (v) e (vi) e das leis de Morgan. Portanto, resta provar itens (ii), (v) e (vi). Seguiremos a ordem (vi), depois (ii) e finalmente (v).<sup>2</sup>

$\boxed{\text{(vi)}}$  Considere uma família  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  de conjuntos mensuráveis e seja  $\epsilon > 0$ . Usaremos o truque  $\frac{\epsilon}{2^n}$ . Para cada  $n \geq 1$ , existe um conjunto aberto  $U_n \supset E_n$  tal que

$$m^*(U_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Defina

$$U := \bigcup_{n \geq 1} U_n.$$

Então,  $U$  é aberto,  $U \supset \bigcup_{n \geq 1} E_n$  e, como

$$U \setminus \left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right) = \left( \bigcup_{n \geq 1} U_n \right) \setminus \left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right) \subset \bigcup_{n \geq 1} (U_n \setminus E_n),$$

usando a subaditividade da medida exterior, tem-se

$$m^* \left( U \setminus \left( \bigcup_{n \geq 1} E_n \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(U_n \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

mostrando que  $\bigcup_{n \geq 1} E_n$  é quase aberto, ou seja, mensurável.

A ser terminada na próxima aula ...  $\square$

<sup>2</sup>Item (ii) teria sido uma consequência dos itens (i) e (v), se conseguíssemos provar (v) diretamente.