

MAT2621 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Informações do curso

❑ Objetivo do curso

O objetivo principal deste curso é o estudo da medida de Lebesgue e da integral de Lebesgue. A integração de Lebesgue é um refinamento da teoria da integração de Riemann, proporcionando uma ferramenta mais fina para a matemática avançada.

❑ Pré-requisitos

Análise real e análise no espaço \mathbb{R}^n .

❑ Professor

- Nome: Silvius Klein
- Coordenadas: sala L749, email silviusk [arroba] impa [ponto] br

❑ Aulas

- Horário, local: segundas (L528) e quartas (L518) das 15h às 17h
- Atendimento: depois de cada aula

❑ Página do curso

http://www.mat.puc-rio.br/~silvius/teaching/mat2621_2020.1/main.html

❑ Bibliografia

- [Tao-book] Terence Tao, *An introduction to measure theory*, disponível online em <https://tinyurl.com/taobookMT>
- [Tao-blogLRN] Terence Tao, artigo do blog <https://tinyurl.com/taoblogLRN>
- [Tao-blogRMK] Terence Tao, artigo do blog <https://tinyurl.com/taoblogRMK>
- [Stein] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces*.

❑ Avaliação

- Listas de exercícios para entregar durante o semestre.
- Dois exames escritos (29 de abril e 1.º de julho).
- Cálculo da nota final: 30% exercícios, 35% cada exame.

□ Programa do curso (sujeito a alterações)

1. A teoria de Jordan-Riemann-Darboux [Tao-book] 1.1
 - 1.1. O problema de mensurabilidade
 - 1.2. Medida elementar
 - 1.3. Medida de Jordan
 - 1.4. A integral de Riemann-Darboux

2. A medida de Lebesgue [Tao-book] 1.2
 - 2.1. A medida externa de Lebesgue: definição, exemplos, o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$
 - 2.2. Conjuntos Lebesgue mensuráveis: definição via o primeiro princípio de Littlewood
 - 2.3. Propriedades da medida externa de Lebesgue
 - 2.4. Propriedades dos conjuntos Lebesgue mensuráveis
 - 2.5. O critério de mensurabilidade de Carathéodory
 - 2.6. Unicidade da medida de Lebesgue
 - 2.7. Exemplo de um conjunto não mensurável

3. A integral de Lebesgue [Tao-book] 1.3
 - 3.1. Uma prévia da integral de Lebesgue
 - 3.2. Integração de funções simples
 - 3.3. Funções mensuráveis
 - 3.4. A integral de Lebesgue de funções mensuráveis não-negativas (integral sem sinal) e integrabilidade absoluta
 - 3.5. Propriedades básicas da integral sem sinal: interpretação de área, linearidade e unicidade da integral de Lebesgue, compatibilidade com a integral de Riemann-Darboux
 - 3.6. Integrabilidade absoluta, os espaços L^p , a desigualdade de Markov
 - 3.7. O segundo princípio de Littlewood (o teorema de Lusin) e o terceiro princípio de Littlewood (o teorema de Egorov)

4. Espaços de medida abstratos [Tao-book] 1.4 e 1.5
 - 4.1. σ -álgebras e espaços mensuráveis
 - 4.2. Medidas abstratas
 - 4.3. Funções mensuráveis
 - 4.4. A integral de uma função mensurável num espaço de medida abstrato
 - 4.5. Os teoremas de convergência: convergência monótona, o teorema de Tonelli, o lema de Borel-Cantelli, o lema de Fatou, o teorema de convergência dominada
 - 4.6. Modos de convergência

5. Teoremas de diferenciação [Tao-book] 1.6
 - 5.1. O teorema fundamental do cálculo
 - 5.2. O teorema de diferenciação de Lebesgue (em dimensão um):
formulação e demonstração:
 - O lema do sol nascente
 - O operador maximal de Hardy-Littlewood
 - A desigualdade de Hardy-Littlewood
 - 5.3. Funções absolutamente contínuas e o teorema fundamental do cálculo para integrais de Lebesgue

6. Construção abstrata de medidas [Tao-book] 1.7
 - 6.1. Medidas externas e o teorema de extensão de Carathéodory
 - 6.2. Pre-medidas e o teorema de extensão de Kolmogorov
 - 6.3. A medida de Lebesgue-Stieljes
 - 6.4. A medida produto

7. Tópicos avançados em teoria da medida [Tao-blogLRN] e [Tao-blogRMK]
 - 7.1. Medidas com sinal; o teorema de decomposição de Hahn; o teorema de decomposição de Jordan
 - 7.2. O teorema de Radon-Nikodym; o teorema de decomposição de Lebesgue para medidas; funções de distribuição das medidas de Borel na reta real
 - 7.3. O teorema de representação de Riesz–Markov–Kakutani