

**LISTA 2: CONJUNTOS MENSURÁVEIS POR LEBESGUE**

**Exercício 1.** Sejam  $E \subset \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Prove a invariância por translações da medida de Lebesgue exterior:

$$m^*(x + E) = m^*(E).$$

- (ii) Prove uma propriedade similar para a multiplicação:

$$m^*(x E) = |x| m^*(E),$$

onde  $x E := \{x \cdot a : a \in E\}$ .

**Exercício 2.** Seja  $E \subset \mathbb{R}$  com  $m^*(E) < \infty$ .

Defina a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pondo

$$f(x) := m^*(E \cap (-\infty, x]).$$

Prove que  $f$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 3.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em todos os pontos.

- (a) Prove que se para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos  $|f'(x)| \leq 1$ , então para todo subconjunto  $E \subset \mathbb{R}$  vale o seguinte:

$$m^*(f(E)) \leq m^*(E).$$

Dizemos, neste caso, que a função  $f$  *contrai* a medida.

*Dica:* Use o teorema do valor médio do cálculo.

- (b) Obtenha um exemplo de função diferenciável  $f$  tal que para algum  $x$  tem-se  $|f'(x)| > 1$ , mas  $f$  não *contrai* a medida.

*Dica:* Use o exercício 1(ii) acima.

**Exercício 4.** Obtenha um exemplo de conjunto  $E \subset \mathbb{R}$  para o qual

$$m^*(E) > \sup \{m^*(U) : U \subset E, U \text{ é aberto}\}.$$

Com isso mostramos que o análogo *literal* da regularidade exterior para a regularidade interior é falso.

Os problemas seguintes estabelecem a aditividade finita de medida de Lebesgue para conjuntos compactos e abertos.

**Exercício 5.** Prove que se  $U$  e  $V$  são conjuntos *abertos* com  $U \cap V = \emptyset$ , então

$$m^*(U \cup V) = m^*(U) + m^*(V).$$

**Exercício 6.** Sejam  $K$  e  $L$  subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}$  (ou de  $\mathbb{R}^d$ ) tais que  $K \cap L = \emptyset$ .

(i) Prove que  $\text{dist}(K, L) > 0$ , onde

$$\text{dist}(K, L) := \inf \{|x - y| : x \in K, y \in L\}.$$

(ii) Prove que existem dois conjuntos *abertos*  $U$  e  $V$  satisfazendo  $K \subset U$ ,  $L \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

(iii) Prove que

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L).$$

**Exercício 7.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto arbitrário. Mostre que existe um conjunto Lebesgue *medível*  $E'$  tal que  $E \subset E'$  e  $m^*(E) = m(E')$ .

*Dica:* Use a regularidade da medida de Lebesgue exterior.

**Exercício 8.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$ .

(i) Prove que se  $E$  está “perto de um aberto” (i.e. para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $U$  aberto tal que  $m^*(U \Delta E) < \epsilon$ ), então  $E$  é Lebesgue *medível*.

(ii) Prove que se  $E$  está “perto de um fechado” (i.e. para todo  $\epsilon > 0$  existe  $F$  fechado tal que  $m^*(E \Delta F) < \epsilon$ ) então  $E$  é “quase fechado” (i.e. para todo  $\epsilon > 0$  existe  $F$  fechado tais que  $F \subset E$  e  $m^*(E \setminus F) < \epsilon$ ).

**Exercício 9.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$ . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $E$  é Lebesgue *medível* e  $m(E) < \infty$ .
- (2)  $E$  está “perto de um compacto”: para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto compacto  $K$  tal que  $m^*(E \Delta K) < \epsilon$ .
- (3)  $E$  está “perto de um conjunto *medível* e limitado”: para todo  $\epsilon > 0$  existe  $S$  *medível* e limitado tal que  $m^*(E \Delta S) < \epsilon$ .
- (4)  $E$  está “perto de um conjunto *medível* com medida finita”: para todo  $\epsilon > 0$  existe  $S$  *medível* tais que  $m(S) < \infty$  e  $m^*(E \Delta S) < \epsilon$ .