LISTA 3: FUNÇÕES MENSURÁVEIS POR LEBESGUE

Exercício 1. Prove que o produto de duas funções simples também é simples. Depois prove que o produto de duas funções mensuráveis (por Lebesgue) é também mensurável.

Exercício 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função mensurável que mora numa caixa. Prove que para todo $\epsilon > 0$ existem duas funções simples $s, \sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, que moram na mesma caixa e tais que

$$s \le f \le \sigma \quad \text{e} \quad \int (\sigma - s) < \epsilon\,.$$

Exercício 3. Prove que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e contínua em quase todo ponto, então f é Lebesgue mensurável.

Exercício 4. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e seja $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que $\phi \circ f$ é mensurável.

Exercício 5. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ uma função mensurável e seja $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função não decrescente. Prove que $\phi \circ f$ é mensurável e para todo $\lambda \ge 0$, a seguinte desigualdade é valida:

$$m\{f \ge \lambda\} \le \frac{1}{\phi(\lambda)} \int \phi \circ f\,.$$

Exercício 6. Prove que se a sequência de funções mensuráveis $\{f_n\}_{n\ge 1}$ converge à função f em quase todo ponto, então o limite f também é mensurável.

Exercício 7. Seja $f\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ uma função localmente Riemann integrável (ou seja, Riemann integrável em cada intervalo $[a,b]$, onde $b \ge a$). Suponha que a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge. Prove que f é Lebesgue integrável e

$$\int_{[a,\infty)} f(x)\,dm(x) = \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Exercício 8. Enuncie e prove um resultado análogo ao resultado do exercício anterior, para integrais impróprias num intervalo finito. Use esse resultado para provar que a função

$$\log|x| \in L^1\left([-1,1]\right) .$$

Exercício 9. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ uma função mensurável. Prove que

$$\text{gráfico }(f) := \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^d \ \text{ e } \ y = f(x)\}$$

é um conjunto negligenciável em $\mathbb{R}^{d+1}$.