

## LISTA 4: ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

**Exercício 1.** Prove que uma álgebra atômica é uma  $\sigma$ -álgebra.

Recorde que uma álgebra atômica é definida como segue.

Dado um conjunto  $X$ , considere uma partição

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

em subconjuntos disjuntos (os quais nos referimos como “átomos”), e defina

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha : J \subset I \right\}.$$

Em outras palavras,  $\mathcal{A}$  consiste de todas as possíveis uniões de átomos.

Então prove que  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

**Exercício 2.** Considere uma álgebra atômica com um conjunto enumerável de átomos.

Explique como se pode definir uma medida neste espaço mensurável e verifique que esta definição corresponde de fato a uma medida.

*Dica:* comece por associar a cada átomo uma certa “massa”.

**Exercício 3.** Prove que se  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é um espaço de medida *finita*, ou seja  $\mu(X) < \infty$ , e se  $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \geq 1$  é uma sequência de funções mensuráveis tal que  $f_n \rightarrow f$  *uniformemente* então

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

**Exercício 4.** Seja  $S \subset \mathbb{R}$  tal que  $m^*(S) > 0$ . Prove que existe um subconjunto  $E \subset S$  não mensurável.

Este exercício deveria ter sido sugerido em uma lista anterior. A solução dele usa a ideia da construção de um conjunto não mensurável (veja Aula 10), mas não é imediata. Pode seguir os seguintes passos.

(a) Prove que se  $K \subset \mathbb{R}$  é um compacto com  $m(K) > 0$ , então o conjunto

$$K - K := \{x - y : x, y \in K\}$$

contém um intervalo (em torno de 0).

*Dica:* Comece com um aberto  $U \supset K$  com medida comparável a de  $K$ .

(b) Prove que se  $F$  é mensurável e  $m(F) > 0$ , então  $F - F$  (i.e., o conjunto de todas as diferenças de elementos de  $F$ ) contém um intervalo (em torno de 0), logo contém números racionais.

*Dica:* Use a regularidade interior da medida de Lebesgue.

(c) Defina em  $S$  a relação de equivalência

$$x \sim y : x - y \in \mathbb{Q},$$

e (usando o axioma da escolha) seja  $R \subset S$  um conjunto que contém um representante de cada classe de equivalência.

Então, existe  $q \in \mathbb{Q}$  para o qual o conjunto  $(R + q) \cap S$  não é mensurável.

**Exercício 5.** Sejam  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$  o conjunto de Cantor e  $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a função de Cantor. Considere a função

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 2], \quad f(x) = x + c(x).$$

Prove as seguintes afirmações.

- (a)  $f$  é uma função contínua (bom, isso é evidente), (estritamente) crescente e sobrejetora, portanto é bi contínua.  
 (b) A imagem do conjunto de Cantor pela função  $f$  é mensurável e

$$m(f(\mathcal{C})) = 1.$$

Conclua que existe um subconjunto  $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$  não mensurável.

- (c) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}.$$

Prove que  $E$  não é boreliano, mas é mensurável à Lebesgue, logo

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d).$$

**Exercício 6.** Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço mensurável e seja  $\phi: X \rightarrow [0, 1]$  uma função mensurável. Para cada  $n \geq 1$  defina as funções  $f_n := \phi^{1/n}$  e  $g_n := \phi^n$ .

- (a) Prove que todas as funções  $f_n$  e  $g_n$  são mensuráveis.  
 (b) Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \mu(\{x \in X: \phi(x) \neq 0\}).$$

- (c) Suponha que  $\int_X \phi d\mu < \infty$ . Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \mu(\{x \in X: \phi(x) = 1\}).$$

*Dica:* na parte (a) use o fato de que funções potências são contínuas.

Nas partes (b) e (c) use o TCM. Tenha em mente que  $0 \leq f(x) \leq 1$ , o que lhe permite mostrar que as sequências  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  são monótonas.

**Exercício 7.** Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço mensurável e seja  $\phi: X \rightarrow [0, \infty]$  uma função mensurável. Defina a função  $\nu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  pondo

$$\nu(A) := \int_A \phi d\mu = \int_X \phi \cdot \mathbf{1}_A d\mu \quad \text{for every } A \in \mathcal{B}.$$

- (a) Prove que  $\nu$  é mensurável em  $(X, \mathcal{B})$ .  
 (b) Prove que se  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  for uma função mensurável, então

$$\int_X f d\nu = \int_X f \cdot \phi d\mu.$$

*Dica:* para parte (a), apenas para aquecer, comece provando a aditividade *finita* da função  $\nu$ . Para provar a aditividade enumerável use o Teorema de Tonelli (a primeira consequência do TCM).

Parte (b) será feita em casos, começando pelo mais simples tipo de função  $f$  até o caso mais geral.

- i.** Suponha que  $f$  seja uma função indicadora  $f = \mathbf{1}_E$  para algum  $E \in \mathcal{B}$ .  
**ii.** Suponha que  $f$  seja uma função simples:  $f = c_1 \mathbf{1}_{E_1} + \dots + c_k \mathbf{1}_{E_k}$ .  
**iii.** Para o caso geral,  $f$  mensurável, use o fato de que existe uma sequência crescente,  $f_n \nearrow f$ , de funções simples não-negativas. Aplique o caso **ii.** à  $f_n$  e então use o MCT.

**Exercício 8.** (a) Calcule o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x^n} dx.$$

(b) Mostre que a função  $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := e^{-x}$  é absolutamente integrável e então calcule o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} e^{-x^n} dx.$$

*Dica:* na parte (a) use o teorema da convergência monótona. Na parte (b) use o teorema da convergência dominada.

**Exercício 9.** Mostre que a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) := e^{-x^2}$  é absolutamente integrável (relativamente à medida de Lebesgue).

**Exercício 10.** Defina a sequência de funções  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pondo

$$f_n(x) := e^{-x^2} (\sin x)^n.$$

Mostre o seguinte:

- (a)  $f_n \rightarrow 0$  pontualmente em q.t.p. (relativamente à medida de Lebesgue).
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 0$ .
- (c) Prove ainda que  $f_n \rightarrow 0$  na norma  $L^1$  (e portanto, também em medida).

*Dica:* cabe lembrar que  $|\sin x| \leq 1$  para todo  $x$ , e que além disso  $\sin x = \pm 1$  não ocorre frequentemente.

Para parte (b) use o teorema da convergência dominada e o problema anterior. Na parte (c) não há muito o que ser feito, se for notado que, partes (a) e (b) permanecem válidas para  $|f_n(x)|$  ao invés de  $f_n(x)$ .