# Aula 2: Medida elementar (continuação)

$E \subset \mathbb{R}^d$ é elementar se pode ser escrito

como $E = B_1 \cup \dots \cup B_n$

onde $B_1, B_2, \dots, B_n$ são caixas.

Se $E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ união disjunta de caixas,

então $m(E) := |B_1| + \dots + |B_n|$.

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) := \{ E \subset \mathbb{R}^d : E \text{ elementar} \}$

$m : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$

Proposição (propriedades básicas da medida elementar)

(1) $m(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$

$m(\phi) = 0$

(2) Se $E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, $E \cap F = \phi$

então $m(E \sqcup F) = m(E) + m(F)$

aditividade finita

Por indução,

$m(E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k) = m(E_1) + \dots + m(E_k)$.

(3) Se $E$ é uma caixa então $m(E) = |E|$.

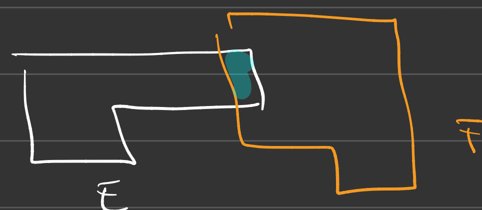
(4) Se $E \subset F$ então $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$.

(5) Se $E \subset F$ então $m(E) \leq m(F)$

monotonicidade

(6) $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$

subaditividade finita




(7) $m(E + a) = m(E)$ para todo $a \in \mathbb{R}^d$

invariância à translação

<u>Prova</u> (1), (2), (3), (7) são evidentes.

(5), (6) c lista 1.

Vamos provar (4):

$$E \subset F \Rightarrow F = E \sqcup (F \setminus E)$$

conjuntos elementares

Usando (2), $m(F) = m(E) + m(F \setminus E)$

$$\Rightarrow m(F \setminus E) = m(F) - m(E).$$

$\square$

Proposição (unicidade da medida elementar)

Suponha que $\lambda : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ seja uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\lambda(E) \geq 0 \quad \forall E$
- $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F) \quad \forall E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$
- $\lambda(E+a) = \lambda(E) \quad \forall a \in \mathbb{R}^d, \forall E$
- $\lambda\left([0,1]^d\right) = 1$

Então, $\lambda \equiv m$

<u>Prova</u> (em dimensão 1)

<u>Passo 1</u> Provemos que $\lambda\big([0,x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

$$[\tfrac{1}{2}, 1) = [0, \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}$$

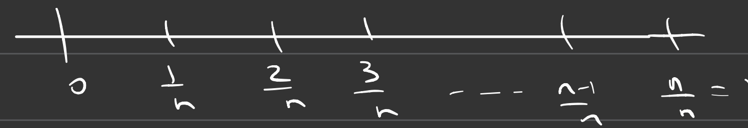

$$\Rightarrow \lambda[\tfrac{1}{2}, 1) = \lambda[0, \tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \lambda[0,1) = \lambda[0,\tfrac{1}{2}) + \lambda[\tfrac{1}{2}, 1)$$

$$\lambda[0,1) = 1 = 2\,\lambda[0,\tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \lambda[0,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

Mais geralmente,




$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \left[0, \frac{1}{n}\right) + \frac{k}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \lambda\left[0, \frac{1}{n}\right) \qquad \forall k$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \lambda[0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

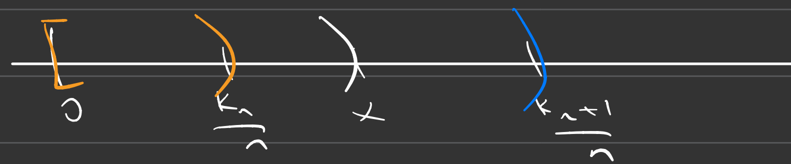
$$= n \, \lambda\left[0, \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\left[0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow \lambda\left[0, \frac{k}{n}\right) = \lambda\left[0, \frac{1}{n}\right) + \lambda\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) + \dots + \lambda\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$$

Seja $x \in \mathbb{R}_+$. Para todo $n \geq 1$ existe $k_n \geq 1$

t.q. $\dfrac{k_n}{n} \leq x < \dfrac{k_n+1}{n}$ $\left( \Rightarrow \dfrac{k_n}{n} \to x \text{ quando } n \to \infty \right)$




$$\Rightarrow \left[0, \frac{k_n}{n}\right) \subset [0, x) \subset \left[0, \frac{k_n+1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda\left[0, \frac{k_n}{n}\right) \leq \lambda[0, x) \leq \lambda\left[0, \frac{k_n+1}{n}\right)$$

(Como $\lambda$ é uma função aditiva e não negativa em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ela também deve ser monótona)

$$\underbrace{\lambda\left[0, \frac{k_n}{n}\right)}_{= \frac{k_n}{n}} \leq \lambda[0,x) \leq \underbrace{\lambda\left[0, \frac{k_n+1}{n}\right)}_{= \frac{k_n+1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k_n}{n} \leq \lambda[0,x) \leq \frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}$$

$$x \quad \text{quando } n \to \infty$$

Logo, $\lambda[0,x) = x$

<u>Passo 2</u> • Seja $[a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$

$$[a, b) = [0, b-a) + a$$

$$\Rightarrow \lambda[a, b) = \lambda[0, b-a) = b-a.$$

• $$\{b\} = \{0\} + b$$

$$\Rightarrow \lambda\{b\} = \lambda\{0\} = 0 \quad \text{pois}$$

$$\{0\} \subset [0, \tfrac{1}{n}) \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lambda\{0\} \leq \lambda[0, \tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \lambda\{0\} = 0.$$

Concluímos o seguinte:

$$\lambda(I) = |I|$$

Para todo intervalo limitado $I$.

$[a,b)$ , $[a,b]$ , $(a,b]$ , $(a,b)$

Passo 3 Seja $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Então

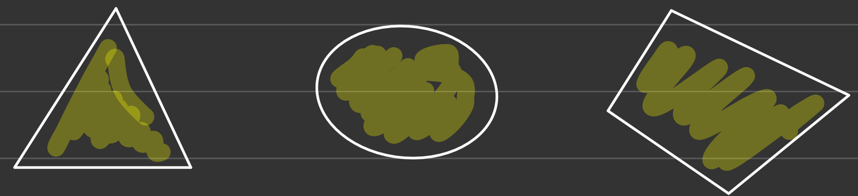
$$E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$$ união disjunta de intervalos

Pela aditividade da função $\lambda$,

$$\lambda(E) = \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_n)$$

$$\underset{(\text{Passo 2})}{=} |I_1| + \dots + |I_n| = m(E)$$ $\square$

# A medida de Jordan

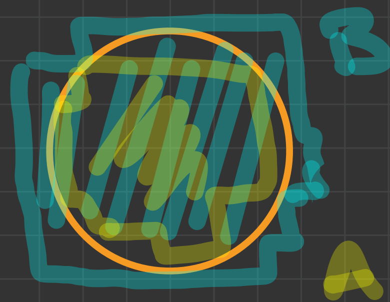
Os conjuntos  ,

ou o conjunto de Cantor (em $\mathbb{R}$)

não são elementares.

Estendemos o conceito de medida a uma família maior de conjuntos, que contém esses exemplos.

Arquimedes:




$A \subset E \subset B$

conjuntos elementares

Podemos aproximar (alguns) conjuntos de dentro e fora por conjuntos elementares.

Consideramos aproximações cada vez mais finas.

Definição Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado.

- A medida interior de Jordan

$$m_{*,J}(E) := \sup\{ m(A) : A \subset E,\ A \text{ elementar} \}$$

- A medida exterior de Jordan

$$m^{*,J}(E) := \inf\{ m(B) : E \subset B,\ B \text{ elementar} \}$$

Obs $0 \leq m_{*,J} \leq m^{*,J} < \infty$

**Definição** Se $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E) =: m(E)$

então $E$ é chamado de conjunto

Jordan mensurável.

Neste caso, $m(E)$ é a medida de Jordan

de $E$.

**Obs** (1) Se $E$ é elementar, então $E$ é Jordan

mensurável.

(2) Se $m^{*,J}(E) = 0$ então $E$ é

mensurável e $m(E) = 0$.

**Teorema** Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado.

As seguintes afirmações são equivalentes (ASASE):

(1) $E$ é Jordan mensurável

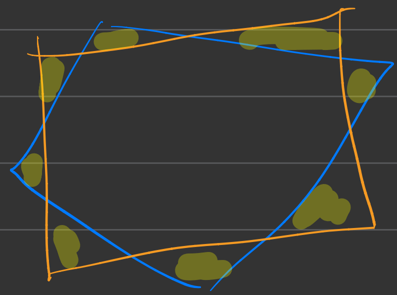
(2) $\forall \varepsilon > 0$ existem $A \subset E \subset B$ t.q.

elementares

$$m(B \setminus A) < \varepsilon$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$ existe $A$ elementar t.q.

$$m^{*,J}(A \,\Delta\, E) < \varepsilon.$$



$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

---

Prova (1) $\iff$ (3) está na lista 1.

Vamos provar (1) $\iff$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $E$ Jordan mensurável.

$$\Downarrow$$

Fixe $\varepsilon > 0$. $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E) = m(E)$

$m(E) = m^{*,J}(E) = \inf\{m(B) : B \supset E\}$
elementar

$\Rightarrow$ existe $B \supset E$ t.q.
elementar

$$m(B) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

$$m(E) = m_{*,J}(E) = \sup\left\{ m(A) : \underset{\text{elementar}}{A \subset E} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ $\underset{\text{elementar}}{A \subset E}$ t.q.

$$m(A) > m(E) - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Então, $A \subset E \subset B$, $A, B$ são elementares e

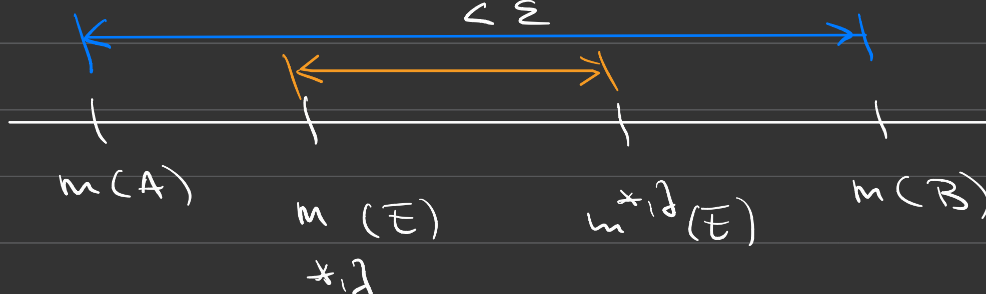
$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$$

$$\underset{(1)}{\leq} \cancel{m(E)} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(2)}{-} \cancel{m(E)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Fixe qualquer $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists\ A \subset E \subset B$ elementares t.q.

$$m(B) - m(A) = m(B \setminus A) < \varepsilon$$




$$\Rightarrow 0 \leq m^{*,J}(E) - m_{*,J}(E) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow m^{*,J}(E) - m_{*,J}(E) = 0 \Rightarrow E$ é Jordan mens. $\square$

## Um truque comum em análise

- Para provar que $a = 0$ (onde $a \geq 0$), é suficiente mostrar que $a < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

- Para provar que $x = y$

  → prove que $|y - x| = 0 \iff |y - x| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

  ou

  → prove que $x \leq y \iff x < y + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

  $y \leq x \iff y < x + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

→ Criar $\varepsilon$ mais espaço.

**Exercício** Prove que a região delimitada por um triângulo é mensurável à Jordan e também prove a fórmula da área de um triângulo.

(ou seja, a medida de Jordan)