Aula 21 : Funções mensuráveis

Definição | Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $f : X \to [0, \infty]$ é dita $\mathcal{B}$-mensurável (ou, simplesmente, mensurável) se para todo conjunto aberto U em $[0, \infty]$, temos

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U) \in \mathcal{B},$$

ou seja, se $\{f \in U\}$ é mensurável.

Similarmente, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se $\{f \in U\} \in \mathcal{B}$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Observação | Temos o seguinte

$$E \in \mathcal{B} \quad \text{sse} \quad 1_E \text{ é mensurável.}$$

De fato, como

$$E = \{1_E \in (0, 2)\},$$

se 1_E é mensurável segue que $E \in \mathcal{B}$.

Por outro lado, supondo E mensurável e dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, como

$$\{1_E \in U\} = \begin{cases} X & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \in U \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \notin U \\ E & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \in U \\ E^c & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \notin U \end{cases},$$

segue que $\{1_E \in U\} \in \mathcal{B}$, mostrando a mensurabilidade de 1_E.

Proposição Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tem-se

$$\{f \in E\} \in \mathcal{B}.$$

Demonstração Utilizaremos o mecanismo padrão para conjuntos. Seja, então,

$$\mathcal{A} := \{ E \subset \mathbb{R} : \{f \in E\} \text{ é mensurável}\}.$$

Como f é mensurável, segue que $U \in \mathcal{A}$ para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra.

De fato,

- $$\emptyset = \{f \in \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

- Se $E \in \mathcal{A}$ então $\{f \in E\} \in \mathcal{B}$,

logo
$$\{f \in E^c\} = \{f \in E\}^c \in \mathcal{B},$$
portanto $E^c \in \mathcal{A}$.

- Se $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ então

$\{f \in E_n\} \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$. Como
$$\{f \in \bigcup_{n \geq 1} E_n\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \in E_n\} \in \mathcal{B},$$
segue que
$$\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}.$$

Concluímos que
$$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$
já que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a menor σ-álgebra contendo os conjuntos abertos. $\square$

Observação 2. Em geral não é verdadeiro que dada uma função mensurável $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ é um conjunto (apenas) mensurável à Lebesgue $S \subset \mathbb{R}$,

$$\{f \in S\} \in \mathcal{B}.$$

Por exemplo, considere a função do Exercício 1 da Aula 19:

$$f : [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = x + c(x),$$

onde $c(x)$ é a função de Cantor.

Seja $g : [0,2] \to [0,1]$ a inversa de f e note que g é mensurável pois é contínua.

Considere (como no Exercício 1 da Aula 19) um conjunto não mensurável $N \subset f(\mathcal{C})$ e seja

$$E := g(N) = f^{-1}(N) \subset \mathcal{C}.$$

Então E é mensurável a Lebesgue, enquanto

$$N = g^{-1}(E) \text{ não é mensurável.}$$

Definição 2. Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função $s : X \to [0, \infty]$ é chamada de função simples sem sinal se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i},$$

para alguns números $c_i \in [0, \infty]$ e conjuntos mensuráveis $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in [k]$.

Similarmente, $s : X \to \mathbb{R}$ é uma função simples (com sinal) se $s = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}$,

onde $c_i \in \mathbb{R}$, $E_i \in \mathcal{B}$ pra todo $i \in [k]$.

Observação 3. Toda função simples é mensurável.

De fato, se $s = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}$, então, dado qualquer aberto U (em $[0, \infty]$ ou $\mathbb{R}$),

$$\{s \in U\} = \bigcup \{E_i : i \in [k], c_i \in U\}$$

então $\{s \in U\} \in \mathcal{B}$.

Além disso, note que somas e produtos de funções simples são funções simples mesmo.

Mais geralmente, dados dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$, uma função

$$f : X \to Y$$

é chamada de mensurável se

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_X \text{ para todo } E \in \mathcal{B}_Y.$$

Dada uma função $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$, o contradomínio $\mathbb{R}$ é, a priori munido com a σ-álgebra de Borel (em vez da Lebesgue). Deste jeito, a noção de mensurabilidade da função $f : X \to \mathbb{R}$ é consistente com o conceito mais geral introduzida acima.

Os seguintes resultados básicos sobre funções mensuráveis $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ são análogos aos resultados correspondentes sobre funções mensuráveis à Lebesgue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As demonstrações deles também são identicas às demonstrações no contexto euclidiano; por isso, omitiremos os detalhes técnicos das provas.

Teorema 1. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.

(1) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ (ou $[0,\infty]$) é mensurável se, e somente se, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{f > \lambda\} \in \mathcal{B}.$$

isto também é equivalente a

$$\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$$

ou $$\{f < \lambda\} \in \mathcal{B}$$

ou $$\{f \leq \lambda\} \in \mathcal{B}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se f^+ e f^- são mensuráveis, onde

$$f^+, f^- : X \to [0,\infty),$$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{e}$$
$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

(3) Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ são mensuráveis e $f_n \to f$ em todo ponto, então f é mensurável.

(4) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\varphi \circ f$ é mensurável.

Demonstração (1) $\{f > \lambda\} = f^{-1}(\lambda, \infty)$ e (λ, ∞) é aberto, portanto a implicação indireta segue.

Para justificar a implicação direta, note que todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos

$$U = \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n).$$

Como $\{f \in U\} = \bigcup_{n \geq 1} \{f \in (a_n, b_n)\}$,

basta provar que

$$\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$$

para todo intervalo (a,b). Mas

$$\{f \in (a,b)\} = \{f > a\} \cap \{f < b\}.$$

Além disso,

$$\{f < b\} = \{f \geq b\}^c = \left\{\bigcap_{n \geq 1} \left\{f > b - \frac{1}{n}\right\}\right\}^c$$

que pertence a $\mathcal{B}$.

Logo, $\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$.

(2) A equivalência é uma consequência das seguintes identidades: para todo $\lambda \geq 0$,

$$\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},$$

$$\{f^- > \lambda\} = \{-f > \lambda\} = \{f < -\lambda\},$$

$$\{f = 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}.$$

(3) Não é difícil verificar que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) > \lambda \quad \text{sse}$$

$$\exists\, m \geq 1 \ \exists\, N \geq 1 \ \forall n \geq N \quad f_n(x) > \lambda + \frac{1}{m}.$$

Portanto,

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m\geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{f_n > \lambda + \frac{1}{m}\right\} \in \mathcal{B}.$$

(4) Se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, como φ é contínua, $\{\varphi \in U\} = \varphi^{-1}(U)$ é aberto.

Portanto, $\{\varphi \circ f \in U\} = (\varphi \circ f)^{-1}(U)$

$$= f^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \text{ é mensurável.}$$

$\square$

Teorema 2. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.

(1) Uma função $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável se e somente se existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais e finitas, tal que

$$s_n \to f \quad \text{em todo ponto.}$$

(2) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se existe uma sequência de funções simples (com sinais) e finitas $\{s_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$s_n \to f \quad \text{em todo ponto.}$$

Demonstração As implicações indiretas são consequências do Teorema 1 (3) e da Observação 3 (que toda função simples é mensurável).

A construção de uma sequência monótona de funções simples que convergem para f é idêntica a do caso da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

De fato, dado $f : X \to [0, \infty]$ mensurável, para todo $n \geq 1$, seja

$$s_n := n \, 1_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{j}{2^n} \, 1_{\left\{f \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right\}}$$

Não é difícil verificar que

$$s_n \leq s_{n+1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Além disso, se $f(x) = \infty$, então para todo $n \geq 1$, $s_n(x) = n \to \infty = f(x)$, enquanto se $f(x) < \infty$, para todo $n > f(x)$ tem-se

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

logo $s_n(x) \to f(x)$.

Finalmente, dado $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável, como f^+ e f^- são funções mensuráveis sem sinais, pelo argumento acima, existem sequências de funções simples $\{s_n\}_{n \geq 1}$ e $\{t_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$s_n \to f^+$ e $\sigma_n \to f^-$ em todo ponto.

Portanto, $s_n - \sigma_n$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- = f.$$

$\square$

<u>Teorema 3</u> Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis. Então

$f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis.

<u>Demonstração</u> Pelo teorema anterior, existem duas sequências de funções simples $\{s_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ tais que

$s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então $s_n + \sigma_n$ e $s_n \cdot \sigma_n$ são simples para todo $n \geq 1$ e

$$s_n + \sigma_n \to f + g, \quad s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g,$$

logo $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis.

$\square$