Aula 24: Modos de convergência

Dados $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida,

$\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ funções mensuráveis

$f : X \to \mathbb{R}$ função mensurável

$\{f_n\}_n$ pode convergir para f de maneiras diferentes

- pontualmente + variações
- uniformemente ——"——
- em média
- em medida

① **Convergência pontual**

(a) $f_n \to f$ em todo ponto $x \in X$

(b) em μ-qtp : $\exists\, Z \in \mathcal{B}$, $\mu(Z) = 0$ t.q.

$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in Z^c$.

② **Convergência uniforme**

(a) $f_n \to f$ uniformemente no espaço X inteiro.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in X$

(b) $f_n \to f$ quase uniformemente :

$\forall \delta > 0 \ \exists E \in \mathcal{B}, \quad \mu(E^c) < \delta$

e $f_n \to f$ unif. em E.

(c) Convergência essencialmente uniforme

<u>Def</u> $f_n \to f$ essencialmente uniformemente

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon$

μ-qtp $x \in X$

Obs $f_n \to f$ essencialmente unif. sse

$\exists\, Z \in \mathcal{B}$ $\mu(Z) = 0$ t.q.

$f_n \to f$ unif em Z^c.

Prova $\Leftarrow$ evidente.

$\Rightarrow$ Dado $k \geq 1$ seja $\varepsilon = \frac{1}{k} \Rightarrow \exists\, N_k$ $\exists\, Z_k \in \mathcal{B}$ $\mu(Z_k) = 0$

t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall n \geq N_k$ $\forall x \in Z_k^c$

Seja $Z = \bigcup_{k \geq 1} Z_k \in \mathcal{B}$, $\mu(Z) = 0$

Então $f_n \longrightarrow f$ unif. em Z^c.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, k_0 \geq 1$ $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$.

Se $x \in Z^c \Rightarrow x \in Z_{k_0}^c$

$$\Downarrow$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k_0} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_{k_0}$$

$\boxtimes$

O espaço $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$

Def Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável.

f é essencialmente limitada se $\exists\, C < \infty$

t.q. $|f(x)| \leq C$ para μ-qtp $x \in X$.

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f := \inf\{C : |f(x)| \leq C \ \mu\text{-qtp } x \in X\}$$

Obs $$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{Z \in \mathcal{B} \\ \mu(Z) = 0}} \sup\{|f(x)| : x \in Z^c\}$$

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ mensurável e essencialmente limitada} \}$$

$$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) \big/ \sim$$

$$f \sim g \ : \ f = g \ \ \mu\text{-q.t.p.}$$

Prop $\left(L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu), \ \|\cdot\|_\infty \right)$ é um espaço vetorial normado.

não trivial: se $\|f\|_\infty = 0$ então $f = 0$ q.t.p.

__Obs__ $f_n \to f$ essencialmente uniformemente sse $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

$\Updownarrow$

__prova__

$\exists Z \in \mathcal{B},\ \mu(Z) = 0$

$\Rightarrow$ $f_n \to f$ unif. em Z^c

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in Z^c \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$ Se $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ allora $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

Dato $\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists Z \in \mathcal{B}, \quad \mu(Z) = 0$$

t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in Z^c$

$\Rightarrow f_n \to f$ essenzialmente unif. $\quad$ Tesi

③ Convergência em média

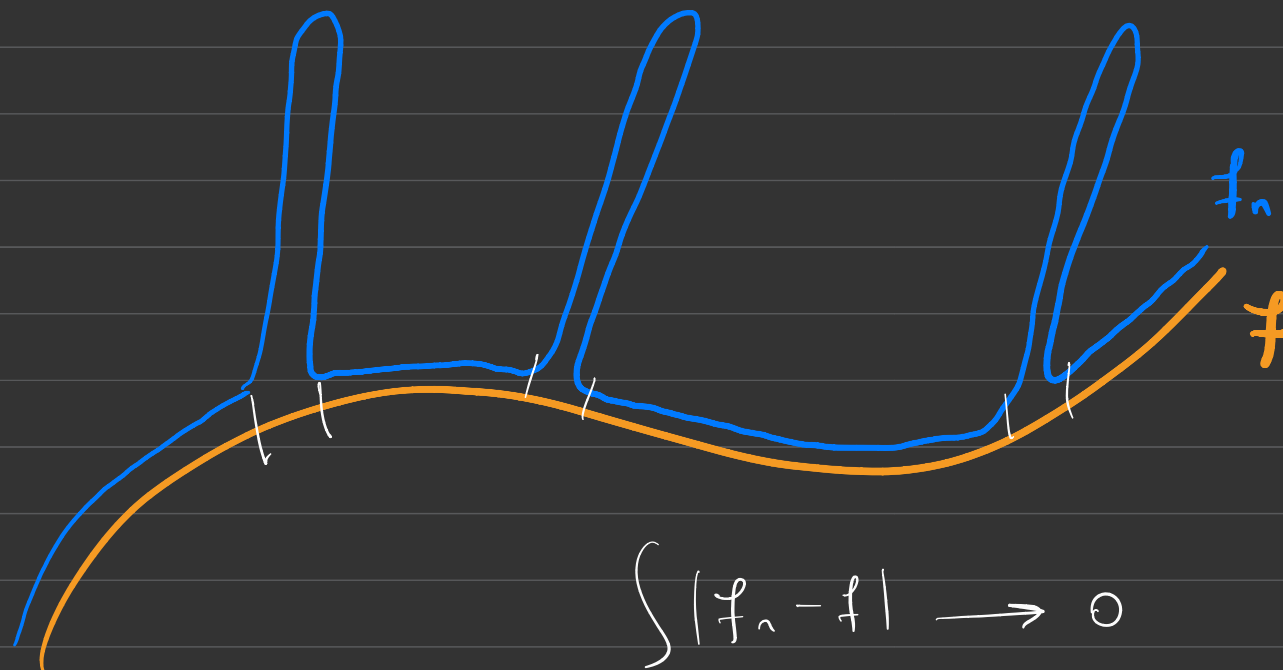
(a) Com respeito à norma em ($\text{em } L^1$)

$$f_n \to f \text{ em } L^1 : \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$

$$\Leftrightarrow \int_X |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$.



$$\int |f_n - f| \longrightarrow 0$$

$\not\Rightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü.

(b) com respeito à norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$

$$f_n \to f \text{ em } L^p : \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \to 0$$

$(p=2)$

$(X, \mathcal{B}, \mu)$

4. Convergência em medida

$f_n \to f$ em medida se $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu \{ |f_n - f| \geq \varepsilon \} \to 0$$

quando $n \to \infty$

$$\{ |f_n - f| \geq \varepsilon \} = \{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \}.$$

Teorema Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida,

$\{f_n\}_{n\geq 1}$ f. mens.

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ f. mens.

(1) Se $f_n \to f$ em $\|\cdot\|_\infty$ então $f_n \to f$ em medida

(2) Se $f_n \to f$ em $\|\cdot\|_\infty$ então $f_n \to f$ μ-qtp

(3) Se $f_n \to f$ em L^p então $f_n \to f$ em medida.

$1 \leq p < \infty$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f \quad 1 \le p < \infty} \arrow[d, Rightarrow, "③"] \arrow[dll, dashed, bend left] \\
\boxed{f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f} \arrow[rr, Rightarrow, "①"'] \arrow[dr, Rightarrow, "②"'] \arrow[urr, dashed, "\text{não, em geral}"] & & \boxed{\begin{array}{c} f_n \longrightarrow f \\ \text{em medida} \end{array}} \\
 & \boxed{f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-qtp}} \arrow[ur, dashed, "\text{não, em geral}"'] &
\end{tikzcd}
$$

① $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \overset{?}{\Longrightarrow} f_n \to f$ en medida

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Uparrow$

$\exists\, Z \in \mathcal{B},\ \mu(Z) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in Z^c$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \forall n \geq N_\varepsilon$

$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset Z$

$\forall n \geq N_\varepsilon$

$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu(Z) = 0 \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$

② $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \implies f_n \to f$ μ-c.t.p.

evidente $\Big\Updownarrow$

$f_n \to f$ unif. μ-c.t.p.

$\Downarrow$

puntual μ-c.t.p.

③ $f_n \to f$ en $L^p \overset{?}{\Longrightarrow} f_n \to f$ en medida.

$$\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$$

Usando a desigualdade de Chebyshev para $|f_n - f|$,

$$\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p} \longrightarrow \frac{0^p}{\varepsilon^p}$$

$$= 0$$

☒

Obs $\quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \quad \not\Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$

(em geral !!)

ex $\quad f_n \equiv \frac{1}{n} \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Então $\quad f_n \to 0 \quad$ unif.

Mas $\quad \|f_n - 0\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m(\mathbb{R})$

$= \infty \not\to 0$

Obs $f_n \to f$ q-tp $\not\Longrightarrow$ $f_n \to f$ em medida

em geral!!!

ex $(\mathbb{R}, m)$

$$f_n = 1_{[n,\infty)} \longrightarrow 0 = f \quad \text{em todo ponto}$$

Mas $m\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \underset{m}{=} \{1_{[n,\infty)} \geq \varepsilon\}$

$\varepsilon > 0$ $= m[n,\infty) = \infty \not\to 0$

Teo Suponha que $\mu(X) < \infty$.

Se $f_n \to f$ em L^∞

então $f_n \to f$ em L^p $\forall\ 1 \le p < \infty$

prova $\exists\ Z \in \mathcal{B}$, $\mu(Z) = 0$ t.q.

$f_n \to f$ unif. em Z^c

Fixe $\varepsilon > 0$. $\exists\ N_\varepsilon$ t.q.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\quad \forall x \in Z^c$
$\forall\ n \ge N_\varepsilon$

$\Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)|^p \leq \varepsilon^p$

$\mu(Z) = 0$

$\forall x \in Z^c$

$\forall n \geq n_\varepsilon .$

$$\underbrace{\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu}_{= \|f_n - f\|_p^p} = \int_{Z^c} \underbrace{|f_n(x) - f(x)|^p}_{\leq \varepsilon^p} d\mu$$

$$\leq \int_{Z^c} \varepsilon^p \, d\mu = \varepsilon^p \mu(Z^c)$$

$$= \varepsilon^p \mu(X) \quad < \infty$$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$

$\boxtimes$

$$\int_X g = \int_Z g + \int_{Z^c} g$$

$$\int_Z g = 0$$

$$\mu(Z) = 0$$

$$\int_Z g = \int_X g \cdot 1_Z = 0$$

$= 0$ μ-a.e.

Suponha que

<u>Teo</u> $\mu(X) < \infty$

Se $f_n \longrightarrow f$ μ-qtp

então $f_n \longrightarrow f$ em medida.

<u>Prova</u> Fixe $\varepsilon > 0$. $f_n \longrightarrow f$ μ-qtp.

Então $\exists\, Z \in \mathcal{B}$ $\mu(Z)$ t.q. $\forall x \in Z^c$

$\exists\, n_\varepsilon(x)$ t.q. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (1)

$\forall n \geq n_\varepsilon(x)$.

Dado $N \in \mathbb{N}$, seja

$$E_N := \{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \}$$

$$(1) \Rightarrow \quad E_N \nearrow Z^c$$

$$\Rightarrow \quad E^c \searrow Z$$

$\mu(X) < \infty$

$$\Rightarrow \quad \mu(E_N^c) \longrightarrow \mu(Z) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad \mu\{ x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$