Aula 25 Modos de convergência (continuação)

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida

- convergência essencialmente uniforme (em L^∞)

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$: $f_n \to f$ unif. em S, $\mu(S^c) = 0$

- conv. em μ-qtp

- em média $(1 \leq p < \infty)$ $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$: $\|f_n - f\|_p \to 0$

$$\|g\|_1 = \int |g| \, d\mu$$

$$\|g\|_p = \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

- $f_n \to f$ em medida se $\forall \delta > 0$

$$\mu \{ x \in X : | f_n(x) - f(x) | \geq \delta \} \to 0$$

quando $n \to \infty$

Caso geral $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço qualquer de medida

$$\boxed{f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f \qquad 1 \le p < \infty}$$

$$\boxed{f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f}$$

$$\boxed{f_n \longrightarrow f \text{ em medida}}$$

$$\boxed{f_n \to f \quad \mu\text{-qtp}}$$

Espaço de medida finita $\quad \mu(X) < \infty$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f \qquad 1 \le p < \infty} \arrow[d] \\
\boxed{f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f} \arrow[urr] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \boxed{f_n \longrightarrow f \ \text{em medida}} \\
 & \boxed{f_n \to f \qquad \mu\text{-qtp}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Def Um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é chamado de espaço de probabilidade se

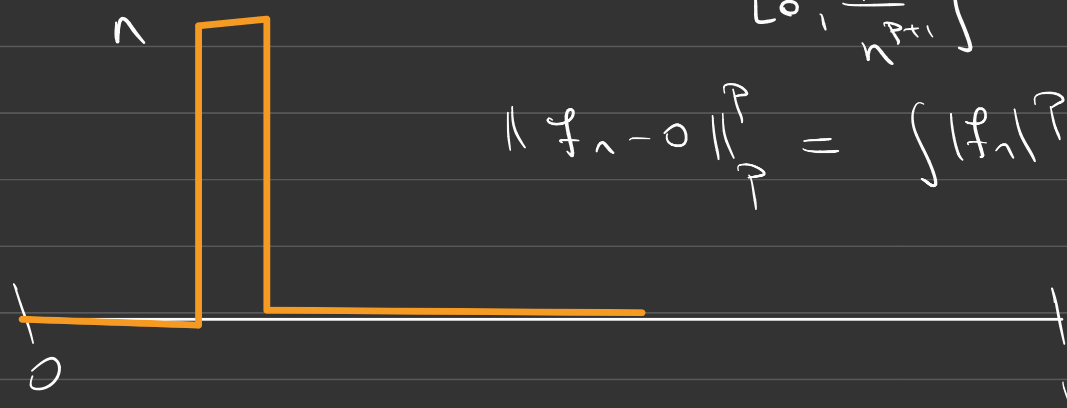
$$\mu(X) = 1$$

Obs 1 conv. em L^p $\not\Rightarrow$ conv. em L^∞

$1 \le p < \infty$

ex $X = [0,1]$ com a medida de Lebesgue

$$f_n = n \, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n^{p+1}}]} \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f \equiv 0$$



$$\|f_n - 0\|_p^p = \int |f_n|^p \, dm = n^p \cdot \frac{1}{n^{p+1}} =$$

$$= \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$f_n = n \, 1_{[0, \frac{1}{n^{p+1}}]}$$

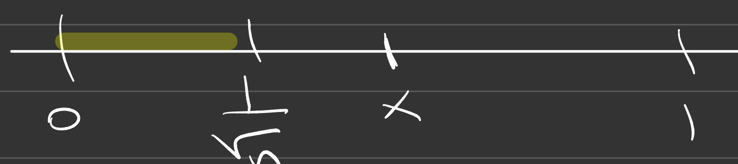
Mas $\|f_n\|_\infty = n \longrightarrow \infty$

entonces $f_n \not\longrightarrow 0$ en $\|\cdot\|_\infty$.

Obs Conv. em μ-qtp $\not\Longrightarrow$ conv. em L^p
$(1 \leq p \leq \infty)$

ex $f_n = n \, \mathbb{1}_{\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]} \longrightarrow 0$ em todo ponto.

p = 1



Mas $\| f_n - 0 \|_1 = \int f_n = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$

$\Rightarrow f_n \not\to 0$ em L^1.

Obs Conv. em medida $\not\Rightarrow$ conv. μ-qtp

ex

$$[0,1],\ \left[0,\tfrac{1}{2}\right),\ \left[\tfrac{1}{2},1\right],\ \left[0,\tfrac{1}{3}\right],\ \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right],\ \left(\tfrac{2}{3},1\right],\ \dots$$

$$I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad I_4 \quad I_5 \quad I_6, \dots$$

Seja $f_n := 1_{I_n}$ $\forall n \geq 1$. Então, $f_n \to 0$ em medida.

$\delta > 0$

$$\{|f_n - 0| \geq \delta\} = \{1_{I_n} \geq \delta\} = I_n$$

$$m\{|f_n - 0| \geq \delta\} = m(I_n) \longrightarrow 0.$$

Mas $f_n \not\to 0$ n-g.t.p.

$$f_n = 1_{I_n}$$

$\forall x \in [0,1]$ $\exists$ subseq. $\{n_k\}$ t.q. $x \in I_{n_k}$

$\Rightarrow f_{n_k}(x) = 1 \longrightarrow 1$

$\exists$ subseq. $\{m_\ell\}$ t.q. $x \notin I_{m_\ell}$

$\Rightarrow f_{m_\ell}(x) = 0 \longrightarrow 0$

$\Rightarrow f_n(x) \not\to$ $\forall x$.

<u>Obs</u> Conv. em L^p $\not\Rightarrow$ conv. qtp

Mesmo exemplo anterior.

$$f_n = 1_{I_n}$$

$$\|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p = \int 1_{I_n} = m(I_n) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^p$$

Mas $f_n \not\rightarrow$ em nenhum ponto.

Teo Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida finita.

Se $f_n \longrightarrow f$ em medida

então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$

t.q.

$$f_{n_k} \longrightarrow f \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

Prova exercício.

Teo (de Egorov) Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita. Então

$f_n \longrightarrow f$ μ-qtp sse $f_n \to f$ quase uniformemente.

Def $f_n \longrightarrow f$ quase unif: $\forall\, \delta > 0\ \exists\, E \in \mathcal{B}$ t.q. $\mu(E^c) < \delta$ e $f_n \longrightarrow f$ unif. em E.

prova exercício.

Definição Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida.

μ é chamada de σ-finita se

existir uma família enumerável

$\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$, t.q.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

e $\mu(E_n) < \infty \quad \forall n \geq 1.$

ex A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ é σ-finita.

Teo (Egorov) Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finita então

$$f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-qtp} \quad \text{sse} \quad f_n \longrightarrow f \text{ quase unif.}$$

prova exercício.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$\mu(E_n) < \infty$$