Aula 26 O teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Seja $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de medida σ-finita. Nos referimos a m como

medida de referência.

Por exemplo este espaço pode ser

$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ a medida de Lebesgue.

Seja $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável.

Então $m_f : \mathcal{B} \to [0, \infty]$

$$m_f(E) := \int_E f \, dm = \int_X f \cdot 1_E \, dm$$

é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ também.

Além disso, $f \in L^1(m)$ sse m_f é uma medida finita.

$\left(\int_X f \, dm < \infty \right)$ $\quad$ $(m_f < \infty)$

$m_f(X) = \int_X f \, dm < \infty$.

De fato,

- $m_f(\phi) = \int_\phi f \, dm = 0$; $\quad m_f(E) = \int_X \overbrace{f 1_E}^{\geq 0} \, dm \geq 0$.

- $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ disjuntos $\Longrightarrow 1_{\sqcup E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{E_n}$

$$m_f\left(\bigsqcup_{n\geq 1} E_n\right) = \int_X f \cdot 1_{\bigsqcup_{n\geq 1} E_n} \, dm =$$

$$= \int_X \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f \cdot 1_{E_n}}_{\text{mens, } \geq 0} \, dm \underset{\text{Tonelli}}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \cdot 1_{E_n} \, dm$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m_f(E_n) \quad \blacksquare$$

Dadas $f_1, f_2 : X \to [0,\infty]$ mensuráveis

Obs 1 $m_{f_1} = m_{f_2}$ sse $f_1 = f_2$ m-qtp

De fato, $\Leftarrow$ é evidente

$\Rightarrow$: Seja $f := f_1 - f_2$

$$m_{f_1} = m_{f_2} \Rightarrow \int_E f_1 \, dm = \int_E f_2 \, dm$$

$$\Rightarrow \int_E f \, dm = 0 \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

$$\Downarrow$$

$$f = 0 \text{ m-qtp} \quad (\Leftrightarrow f_1 = f_2 \text{ m-qtp})$$

Obs 2 Para toda função mensurável

$\varphi : X \to [0, \infty]$,

$\boxed{\text{Formalmente, } (*) : \quad dm_f = f\, dm}$

$$\int_X \varphi \, dm_f = \int_X \varphi \cdot f \, dm \qquad (*)$$

Prova: (lista 4) $\varphi = 1_E$, $E \in \mathcal{B}$

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}$$

$\exists\ 0 \le s_n \nearrow \varphi$ TCM

simples

Definição Uma medida μ em $(X, \mathcal{B})$ é absolutamente contínua com respeito a m,

e escrevemos $\mu \ll m$

Se o seguinte for válido:

$$m(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

(para algum $E \in \mathcal{B}$)

(todo conjunto m-negligenciável deve ser μ-negligenciável)

$\underline{Ex}$ $\quad m_f << m$ para toda função $f : X \to [0, \infty]$.

Se $m(E) = 0$ $\qquad m_f(E) = \int_E f \, dm$

então $f \cdot 1_E = 0$ $\qquad = \int_X \underbrace{f 1_E}\, dm = 0$

m-qtp $\qquad = 0 \; m$-qtp

Teorema (de Radon - Nikodym)

Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de medida σ-finita e seja μ uma outra medida σ-finita em $(X, \mathcal{B})$.

Se $\mu << m$ então existe $f : X \to [0, \infty)$ mens t.q. $\mu = m_f$, ou seja,

$$\mu(E) = \int_E f \, dm.$$

Essa função f é única (pela obs 1, se

m-qtp.

$$\mu = m_{f_1} \text{ e } \mu = m_{f_2} \Rightarrow f_1 = f_2 \ m\text{-qtp})$$

Def A única função f t.q. $\mu = m_f$

é chamada a derivada Radon-Nikodym de μ

com respeito a m e escrevemos

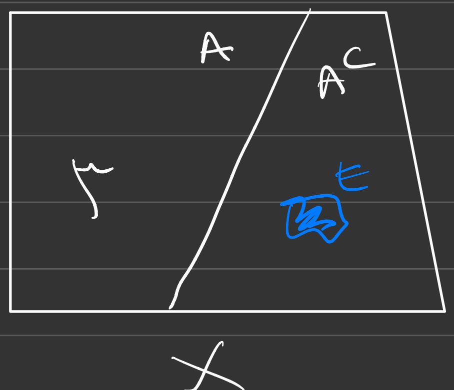
$$f = \frac{d\mu}{dm}.$$

R-N : $\mu \ll m \Rightarrow \exists f : \mu = m_f$

$$d\mu = dm_f = f\,dm$$

$$f = \frac{d\mu}{dm}.$$

Def Seja μ uma medida em $(X, \mathcal{B})$ e $A \in \mathcal{B}$. Dizemos que μ é **suportada em A** e escrevemos



$$\operatorname{supp}(\mu) \subset A$$

Se $\mu(A^c) = 0$

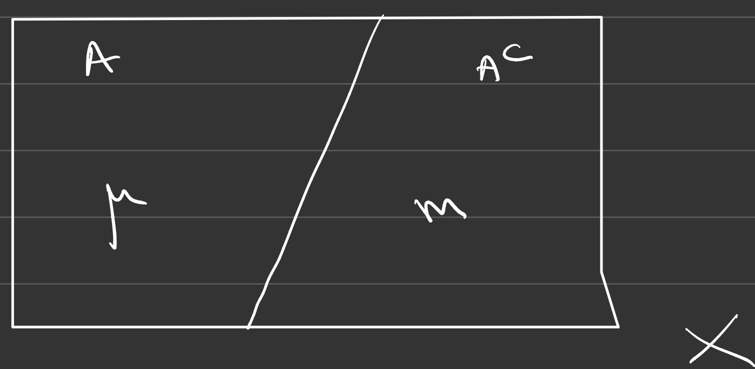
Neste caso, $\mu(E) = 0$

$\forall\, E \subset A^c$

Definição Duas medidas μ e m são **mutualmente singulares** e escrevemos

$$\mu \perp m$$

Se elas são suportadas em conjuntos disjuntos:



$$\exists\, A \in \mathcal{B} \text{ t.q.}$$

$$\mu(A^c) = 0$$

e

$$m(A) = 0$$

Exercício Se $\mu_1 \perp m$, $\mu_2 \perp m$

$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

então $\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 \perp m$

Se $\mu_1 \leq \mu_2$ (ou seja, $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ $\forall E \in \mathcal{B}$)

$\mu_1 < \infty$

então $\mu_2 - \mu_1$ é uma medida finita

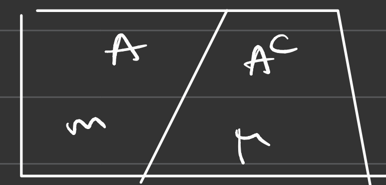
e $\mu_1 \perp m$, $\mu_2 \perp m \Rightarrow \mu_2 - \mu_1 \perp m$.

Se

<u>Obs</u> $\mu \ll m$ então $\mu \equiv 0$

e $\mu \perp m$

De fato $\mu \perp m$



$$\mu(A) = 0 \, , \quad m(A^c) = 0$$

$$\mu \ll m \quad \Rightarrow \quad \mu(A^c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{B}$$

Teorema (de Lebesgue - Radon - Nikodym)

Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de medida σ-finita e μ uma outra medida σ-finita em $(X, \mathcal{B})$.

Então existe uma única decomposição

$$\mu = m_f + \mu_s$$

onde $f : X \to [0, \infty]$ é uma função mensurável e $\mu_s \perp m$.

Além disso, se $\mu < \infty$ então $f \in L^1(m)$ e $\mu_s < \infty$.

<u>Corolário</u> : o teorema (já enunciado) de R-N.

Seja $\mu \ll m$

Pelo teo L-R-N, $\mu = m_f + \mu_s$

$$\Downarrow$$

$$\mu_s = \mu - m_f$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu \ll m \\ m_f \ll m \end{array}\right) \Rightarrow \mu_s = \mu - m_f \ll m$$

Então $\mu_s \ll m$; mas $\mu_s \perp m$ então $\mu_s \equiv 0$

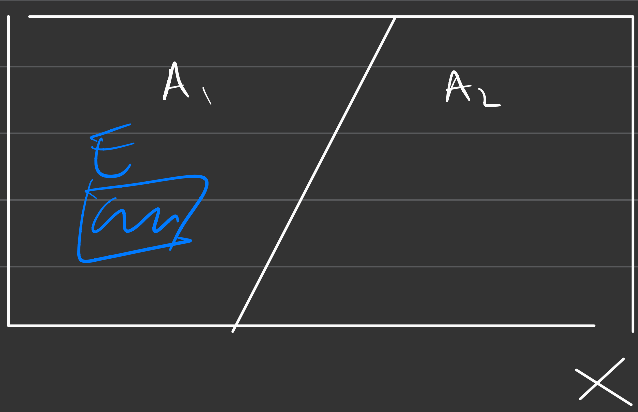
$$\Rightarrow \mu = m_f \qquad \blacksquare$$

Vamos começar a prova do teo de L-R-N.

<u>Unicidade</u> Se $\mu = m_{f_1} + \nu_1$, $\nu_1 \perp m$

$\mu = m_{f_2} + \nu_2$, $\nu_2 \perp m$

Seja $A_1 := \{f_1 \geq f_2\}$ $A_2 := \{f_1 < f_2\}$



$\Rightarrow$ $A_1 \sqcup A_2 = X$

A restrição de uma medida ν a um conjunto A é a medida $\nu_A(E) = \nu(E \cap A)$

Restringindo tudo ao conjunto A_1 (e similarmente ao conjunto A_2)

$\forall E \in \mathcal{B}$

$E \subset A_1$ $\quad \mu(E) = m_{f_1}(E) + \nu_1(E) = m_{f_2}(E) + \nu_2(E)$

$$\Rightarrow \quad m_{f_1}(E) - m_{f_2}(E) = \underbrace{\nu_2(E) - \nu_1(E)}_{\geq 0}$$

$$\Vert$$

(em A_1, $\quad m_{\underbrace{f_1 - f_2}_{\geq 0}}(E) \qquad \nu_2\big|_{A_1} \geq \nu_1\big|_{A_1}$

$f_1 \geq f_2$)

$\vartheta_2 \perp m \quad , \quad \vartheta_1 \perp m$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\vartheta_2\big|_{A_1} \perp m \qquad \vartheta_1\big|_{A_1} \perp m$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vartheta_2\big|_{A_1} - \vartheta_1\big|_{A_1} &\perp m \\ \| \qquad\qquad & \\ m_{f_1 - f_2}\big|_{A_1} &\perp m \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{f_1-f_2}\big|_{A_1} \equiv 0$$

$\Downarrow$

$f_1 = f_2$ en A_1

m-ctp.

Similarmente, $f_1|_{A_2} = f_2|_{A_2}$ m-q.t.p.

Então, $f_1 = f_2$ m-q.t.p

$\Rightarrow m_{f_1} = m_{f_2} \Rightarrow \nu_1 = \nu_2$

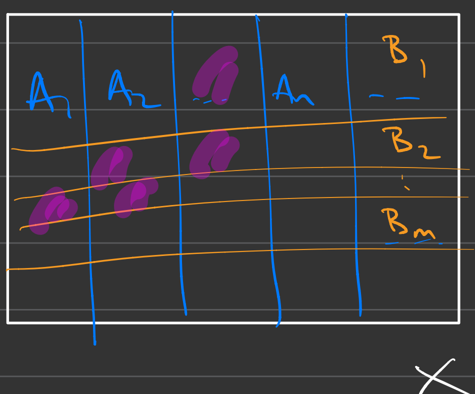
$\mu = m_{f_1} + \nu_1$ $\Rightarrow$ unicidade da

$= m_{f_2} + \nu_2$ decomposição.

$\blacksquare$

Existência Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mu < \infty$ e $m < \infty$.

De fato, como eles são σ-finitos,



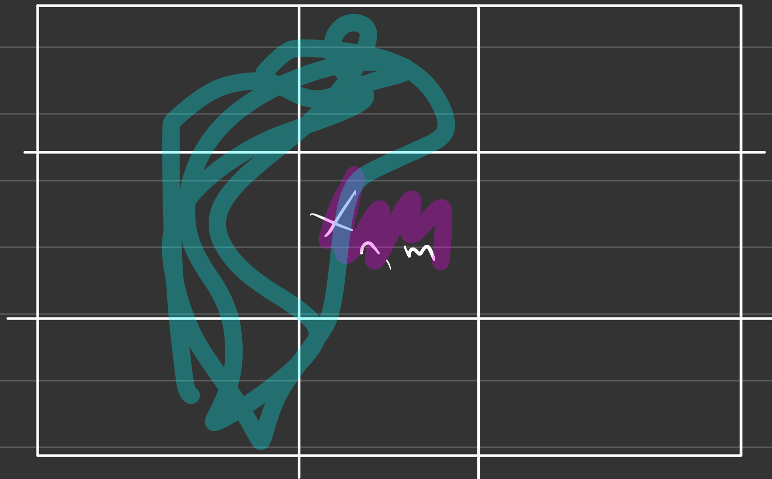
$\exists$ $X = \bigsqcup_{n \geq 1} A_n$ $\quad \exists X = \bigsqcup_{m \geq 1} B_m$

$\mu(A_n) < \infty$ $\quad m(B_m) < \infty$

Seja $X_{n,m} := A_n \cap B_m$

Então $X = \bigsqcup_{n,m \geq 1} X_{n,m}$ e $\mu(X_{n,m}) < \infty$

$m(X_{n,m}) < \infty$



$$\mu_{n,m} = \mu\big|_{x_{n,m}}$$

$$m_{n,m} = m\big|_{x_{n,m}}$$

$$\mu_{n,m} = m_{f_{m,n}} + \mu^{s}_{m,n}$$

Então, a partir de agora,

$$m < \infty$$

$$\mu < \infty$$

Objetivo: provar a existência de $f \in L^1(m)$, $f \geq 0$

t.q. $\mu = m_f + \mu_s$. $\mu_s < \infty$, $\mu_s \perp m$

$\mu = m_f + \mu_s \Rightarrow m_f \leq \mu$

Ideia geral da prova: selecionar f "avidamente"

Candidatas para f:

$$\mathcal{D} = \left\{ f : X \longrightarrow [0, \infty] : \begin{array}{l} f \text{ mensurável} \\ f \geq 0 \text{ t.q.} \\ m_f \leq \mu \\ \int_E f \, dm \leq \mu(E) \end{array} \right\}$$

$$M := \max \left\{ \int_X f \, dm : f \in \mathcal{D} \right\}$$

$$M = \int_X f_0 \, dm$$