Aula 28 Construção abstrata de medidas

Lembre-se a construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$:

- consideramos caixas (ou conjuntos elementares) para as quais já tivemos uma medida natural (o volume):

$$m(B) = |B|$$

$$m(B_1 \sqcup \dots \sqcup B_N) = \sum_{i=1}^{N} |B_i|.$$

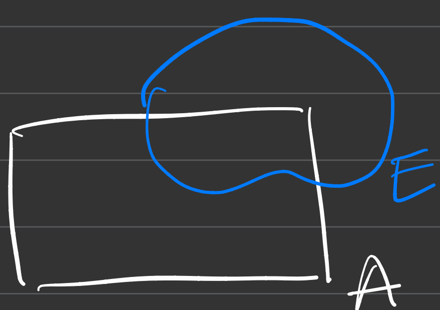
"pre-medida em $\mathbb{R}^d$".

• definimos um conceito mais primitivo de medida: "a medida exterior" de Lebesgue.

Se $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \text{ são caixas ou conjuntos elementares} \right\}.$$

• definimos "conjuntos mensuráveis" via o primeiro princípio de Littlewood, que é equivalente ao princípio de Carathéodory:



$E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável sse $\forall A \subset \mathbb{R}^d$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Neste caso, $m(E) := m^*(E)$.

Medida exterior e o teorema de extensão de Carathéodory.

Definição Dado um conjunto X, uma função

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$ é

chamada de medida exterior se

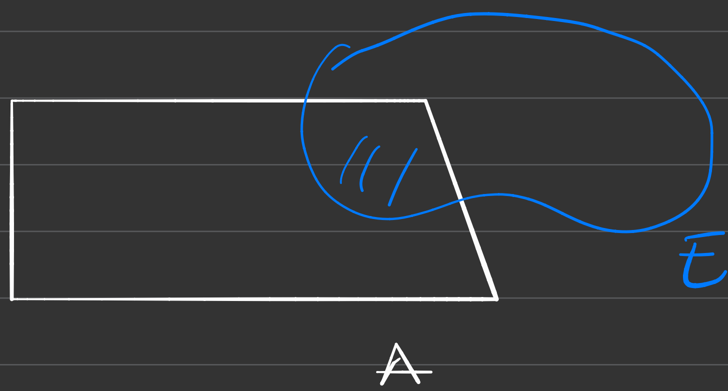
(1) $\mu^*(\phi) = 0$

(2) Se $E \subset F$ então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

(3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Ex m^*, a medida exterior de Lebesgue é uma medida exterior.

Definição Seja μ^* uma medida exterior em X. Um conjunto $E \subset X$ é chamado mensurável (à Carathéodory) com respeito a μ^* se para todo $A \subset X$, temos



$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Observação Por causa da subaditividade de μ^*, $E \subset X$ é mensurável sse

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Observação Se $\mu^*(E) = 0$ então E é mensurável.

Teorema (de extensão de Carathéodory)

Seja μ^* uma medida exterior em X, e

Seja $\mathcal{B} := \{E \subset X : E$ mensurável à Carathéodory$\}$.

Então,

(i) $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra

(ii) $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\mu(E) := \mu^*(E)$ é uma medida.

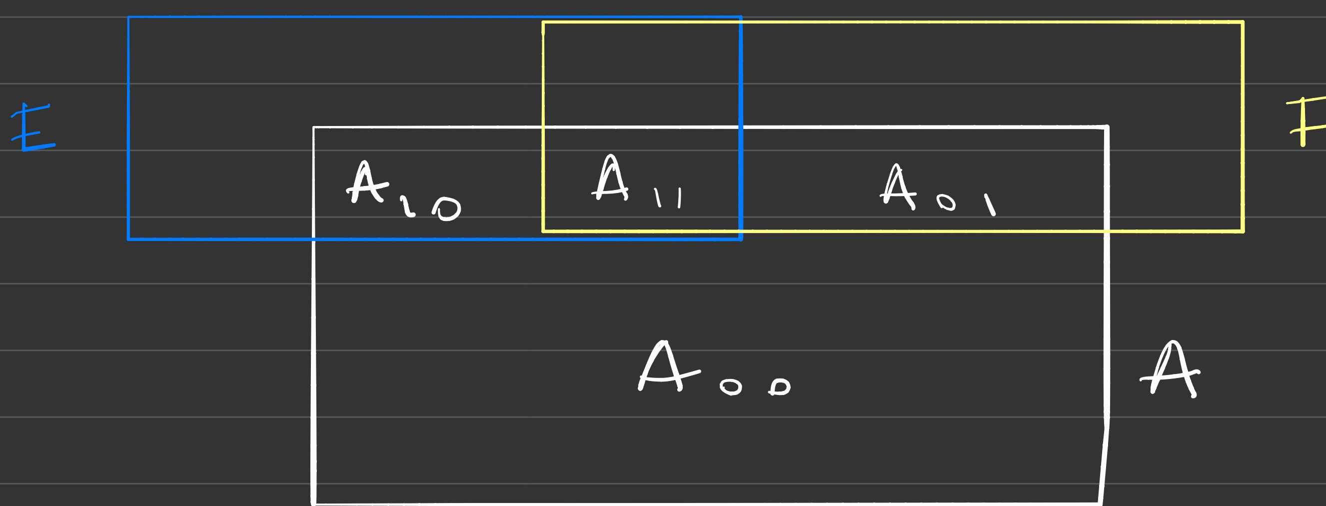
Portanto, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é uma espaço de medida.

Prova

Passo 1 Evidentemente $\emptyset \in \mathcal{B}$, e como $(E^c)^c = E$, temos que $E \in \mathcal{B} \Rightarrow E^c \in \mathcal{B}$.

• Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Vamos provar que $E \cup F \in \mathcal{B}$, ou seja, que dado $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^c) \quad (1)$$



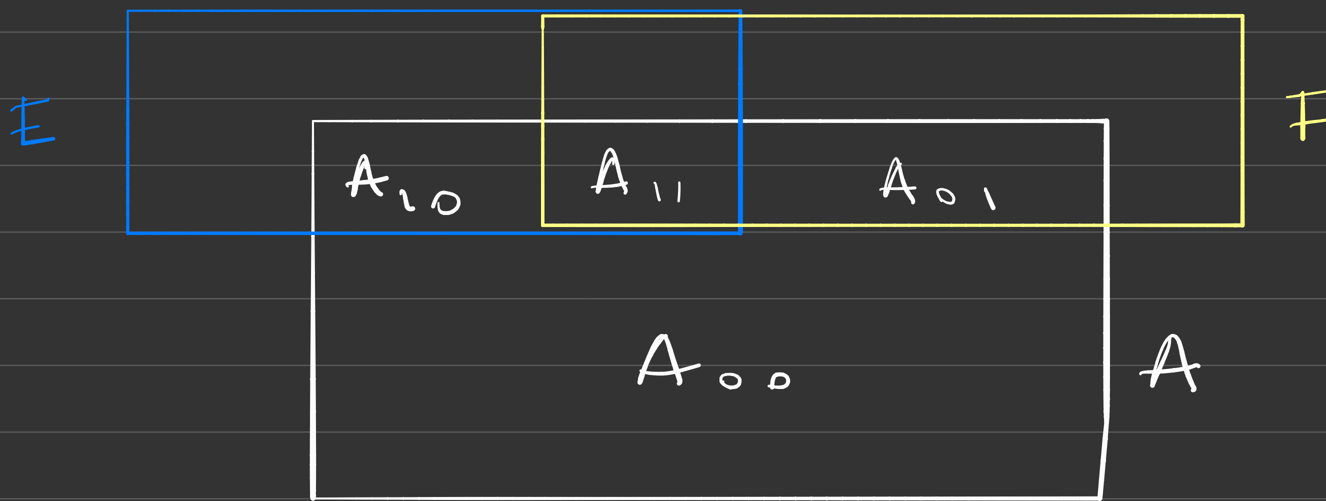
Sejam

$$A_{00} := A \cap (E \cup F)^c = A \cap E^c \cap F^c$$

$$A_{10} := (A \setminus F) \cap E = A \cap E \cap F^c$$

$$A_{01} := (A \setminus E) \cap F = A \cap E^c \cap F$$

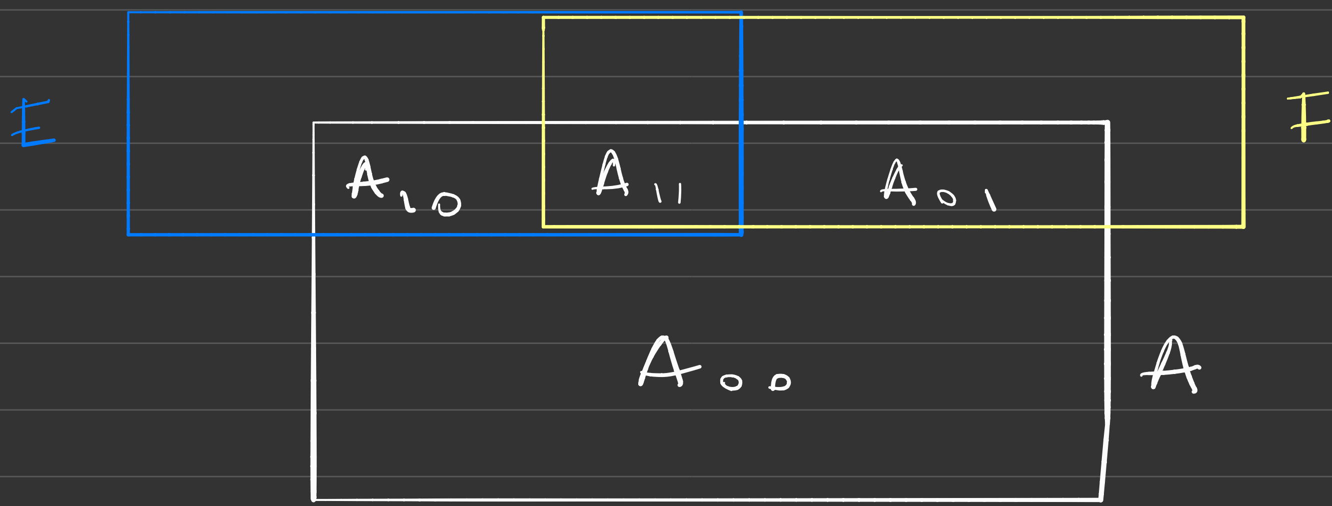
$$A_{11} := A \cap E \cap F$$



(1) é equivalente ao seguinte:

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) = \tag{2}$$

$$= \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{00})$$

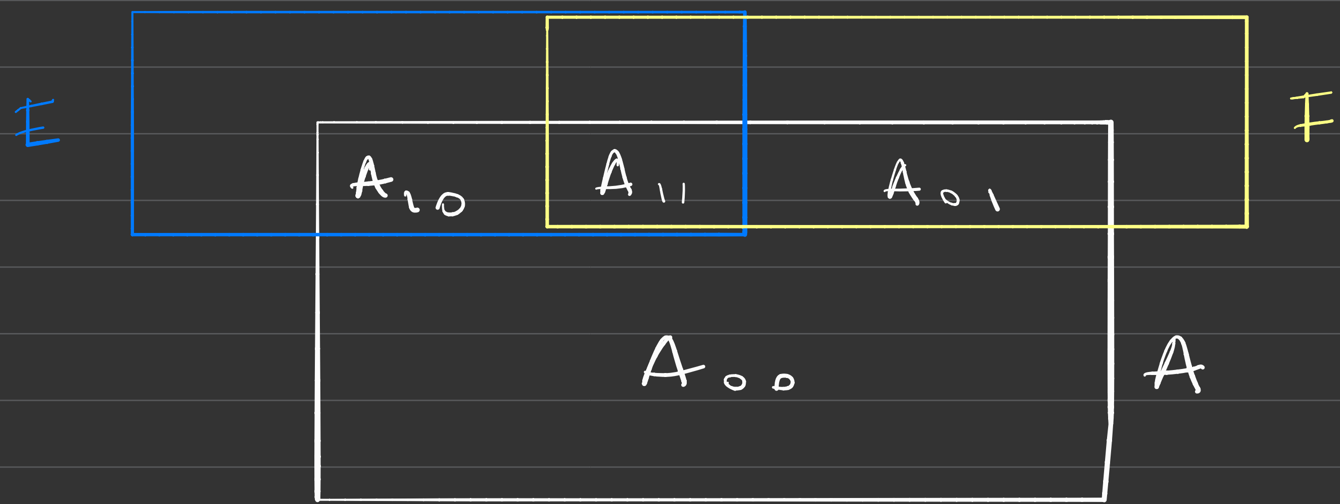


Como $E \in \mathcal{B}$, temos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) = \qquad (3)$$

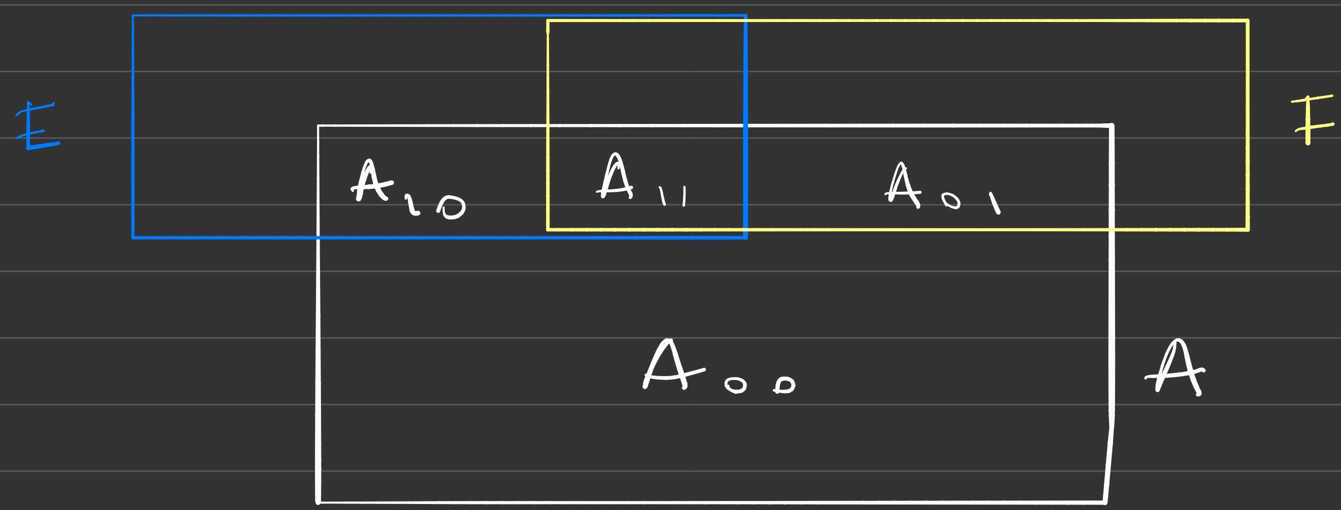
$$= \mu^*(A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{01})$$



De novo, usando o fato que $E \in \mathcal{B}$,

$$\mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01}) = \mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01} \cap E) + \mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01} \cap E^c)$$

$$= \mu^*(A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{01}) \tag{4}$$



Como $F \in \mathcal{B}$, temos que

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01}) = \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cap F) + \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \setminus F)$$

$$= \mu^*(A_{01}) + \mu^*(A_{00}) \qquad (5).$$

E simples ver que $(3) + (4) + (5) \Rightarrow (2)$.

De fato,

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) \overset{(3)}{=} \mu^*(A_{11} \cup A_{10}) +$$

$$+ \mu^*(A_{00} \cup A_{01})$$

$$\overset{(4)}{=} \left(\mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) - \mu^*(A_{01})\right)$$

$$+ \mu^*(A_{00} \cup A_{01})$$

$$\overset{(5)}{=} \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) - \cancel{\mu^*(A_{01})}$$

$$+ \mu^*(A_{00}) + \cancel{\mu^*(A_{01})}$$

$$= \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{00}),$$

mostrando que $E \cup F \in \mathcal{B}$.

Por indução, se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}$, então $E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{B}$.

Portanto, $\mathcal{B}$ é uma álgebra booleana. Então para provar que $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra, é suficiente considerar uma família $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ de conjuntos disjuntos (explique por quê) e mostrar que

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}.$$

Provaremos que para todo conjunto $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \bigcup_{n \geq 1} E_n\Big)$$

Por causa da subaditividade, basta mostrar

$$(1) \quad \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \mu^*(A)$$

Para todo $N \geq 0$, como $E_{N+1} \in \mathcal{B}$

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n\right) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n \cap E_{N+1}\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N+1} E_n \setminus E_{N+1}\right)$$

$$= \mu^*\left(A \cap E_{N+1}\right)$$ (já que $E_n \cap E_{N+1} = \phi$ se $n \neq N+1$)

$$+ \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$

$$\underset{\text{(indução)}}{=} \sum_{n=1}^{N+1} \mu^*(A \cap E_n).$$

Portanto, para todo $N \in \mathbb{N}$,

(2) $$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n).$$

- $$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap E_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$$ (subaditividade da medida exterior)

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A \cap E_n)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$ (usando (2))

Logo,

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \lim_{N \to \infty} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \tag{3}$$

• $$\mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right).$$

$$A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

A sequência $\left\{ \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \right\}_{N \geq 1}$ é

não crescente (já que μ^* é monótona),

logo,

$$(4) \quad \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \lim_{N \to \infty} \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right).$$

Usando (3) e (4), segue que

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) + \lim_{N\to\infty} \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu^*(A) = \mu^*(A)$$

porque $E_n \in \mathcal{B}$ $\forall n \geq 1$ e $\mathcal{B}$ é uma álgebra booleana (pelo primeiro passo), logo $\bigcup_{n=1}^{N} E_n \in \mathcal{B}$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Concluímos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra.

(2) Vamos provar que $\mu(E) := \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}$ é uma medida em $\mathcal{B}$.

- $\mu(\phi) = \mu^*(\phi) = 0$
- A σ- aditividade de μ.

Sejam $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}$ disjuntos.

Temos que provar

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Pela subaditividade da medida exterior, basta provar

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n)$$

e

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) \quad \forall N \geq 1$$

basta provar que

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n)$$

Sejam $E, F \in \mathcal{B}$, disjuntos. Então,

$$\mu^*(E \sqcup F) = \mu^*(E \sqcup F \cap F) + \mu^*(E \sqcup F \setminus F)$$
$$= \mu^*(F) + \mu^*(E);$$

e por indução,

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(E_n).$$

$\blacksquare$

Lema da classe monótona

Definição Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é chamada de classe monótona se

- $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$, $E_n \nearrow E$ $\Rightarrow$ $E \in \mathcal{B}$

- $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$, $E_n \searrow E$ $\Rightarrow$ $E \in \mathcal{B}$.

Observação Toda σ-álgebra é uma classe monótona.

Definição Seja $\mathcal{A}$ uma família qualquer de subconjuntos de X. Então

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ é uma classe monótona } \mathcal{B} \supset \mathcal{A}\}$$

é a classe monótona mínima que contém $\mathcal{A}$.

Lema (da classe monótona) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra booleana. Então,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

a σ-álgebra gerada (mínima) por $\mathcal{A}$. | a classe monótona gerada (mínima) por $\mathcal{A}$.

prova Como $\sigma(\mathcal{A})$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{A}$, segue que

$$\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Resta provar que

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset \sigma(\mathcal{A}),$$

ou seja, que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra.

- $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, logo $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

- Vamos provar que $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Não é difícil ver que se $\mathcal{B}$ for uma classe monótona, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, então

$$\overline{\mathcal{B}} = \{ E^c : E \in \mathcal{B} \}$$

também é uma classe monótona, e $\overline{\mathcal{B}} \supset \mathcal{A}$.

Portanto,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap \{ \mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ é uma classe monótona}, \ \mathcal{B} \supset \mathcal{A} \}$$

$$= \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ classe monótona} \\ \mathcal{B} \supset \mathcal{A}}} \mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$$

Como $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{B}}$ é fechada sobre complemento, concluímos o mesmo sobre $m(\mathcal{A})$.

- Vamos provar que dada $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset m(\mathcal{A})$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in m(\mathcal{A})$.

Temos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_1 \cup E_2) \cup \dots (E_1 \cup \dots \cup E_n) \cup \dots$$

que é uma união monótona.

Basta verificar que

$$E_1 \cup E_2, \dots, E_1 \cup \dots \cup E_n, \dots \in m(\mathcal{A}).$$

Por indução, basta mostrar que

$$\forall E, F \in m(\mathcal{A}), \quad E \cup F \in m(\mathcal{A}).$$

<u>Passo 1</u> Fixe $E \in \mathcal{A}$ arbitrário, e seja

$$\mathcal{C}_E := \{ F \subset X : E \cup F \in m(\mathcal{A}) \}$$

Quero provar que

$$\boxed{E \cup F \in m(\mathcal{A}) \quad \forall F \in m(\mathcal{A})}$$

$$\iff \mathcal{C}_E \supset m(\mathcal{A}).$$

Temos que $\mathcal{C}_E \supset \mathcal{A}$ (porque $\mathcal{A}$ é uma álgebra booleana, então $E \cup F \in \mathcal{A} \subset m(\mathcal{A})$ $\forall E, F \in \mathcal{A}$). Além disso, $\mathcal{C}_E$ é uma classe monótona.

$$\mathcal{C}_E := \{ F \subset X : E \cup F \in m(\mathcal{A}) \}.$$

De fato,

- Se $\{F_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}_E \Rightarrow E \cup F_n \in m(\mathcal{A})$

  $F_n \nearrow F$

então $E \cup F_n \nearrow E \cup F$

$E \cup F_n \in m(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq 1$

$m(\mathcal{A})$ é uma classe monótona,

logo, $E \cup F \in m(\mathcal{A})$, então

$$F \in \mathcal{C}_E.$$

- O mesmo argumento mostra que dada

$\{F_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_E$, $F_n \searrow F$,

$E \cup F_n \in m(\mathcal{A})$,

$E \cup F_n \searrow E \cup F$

$m(\mathcal{A})$ classe monótona,

então $E \cup F \in m(\mathcal{A})$, logo $F \in \mathcal{C}_E$.

Concluímos que $\mathcal{C}_E$ é uma classe monótona,

então

$$\forall E \in \mathcal{A},\ \forall F \in m(\mathcal{A}),\ E \cup F \in m(\mathcal{A}).$$

Passo 2   Fixe $F \in m(\mathcal{A})$ e seja

$$\mathcal{D}_F := \{ E \subset X : E \cup F \in m(\mathcal{A}) \}$$

Pelo passo anterior,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_F.$$

Além disso, $\mathcal{D}_F$ é uma classe monótona (mesmo argumento).

Portanto,

$$\mathcal{D}_F \supset m(\mathcal{A}).$$

Logo, $\forall E \in m(\mathcal{A})$ $\forall F \in m(\mathcal{A})$,

$$E \cup F \in m(\mathcal{A}).$$

$\blacksquare$

Premedidas e o teorema de extensão de Kolmogorov

<u>Definição</u> Seja $\mathcal{B}_0$ uma álgebra booleana em X.
Uma função $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0,\infty]$ t.q.

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- Se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}_0$ são disjuntos e <u>se</u> $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_0$,

então
$$\mu_0\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$$

é chamada de uma pré-medida em X.

<u>Observação</u> (1) Se $E, F \in \mathcal{B}_0$, $E \subset F \Rightarrow \mu_0(E) \leq \mu_0(F)$.

(2) Se $E_n \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$ e $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}_0$ então
$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).$$

Observação Pense em $\mathcal{B}_0$ como a coleção de conjuntos elementares (e os seus complementos) em $\mathbb{R}^d$ e em μ_0 como a medida elementar.

Definição Uma pre-medida μ_0 em $\mathcal{B}_0$ é σ-finita se existem $A_n \in \mathcal{B}_0$, $n \geq 1$ tais que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e $\mu_0(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Podemos supor que $\{A_n\}_{n \geq 1}$ são disjuntos, ou, se for conveniente, que $A_n \nearrow X$.

Teorema (de extensão de Hahn - Kolmogorov)

Sejam X um conjunto, $\mathcal{B}_0$ uma álgebra booleana em X e μ_0 uma pre-medida em $\mathcal{B}_0$.

Então, μ_0 pode ser extendida para uma medida μ em $\sigma(\mathcal{B}_0)$. Portanto, $(X, \sigma(\mathcal{B}_0), \mu)$ é um espaço de medida.

Se μ_0 for σ-finita, então a extensão é única.

Observação A extensão não é necessariamente única se μ_0 não é σ-finita. Por exemplo, seja

$$\mathcal{B}_0 = \{ E \subset \mathbb{R} : E = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i) \text{ ou } E^c = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i) \}$$

$a_i < b_i$

Então $\mathcal{B}_0$ é um álgebra booleana.

Seja $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \longrightarrow [0,\infty]$,

$$\mu_0(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } E \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } E = \emptyset . \end{cases}$$

Então, μ_0 é uma premedida não σ-finita.

μ_0 possui pelo menos duas extensões diferentes:

$$\mu(E) = +\infty \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ E \neq \emptyset.$$

e $\#(E) =$ a cardinalidade de E.

Prova (do teorema de Hahn-Kolmogorov) Imitamos a construção da medida de Lebesgue a partir da medida elementar.

- Definimos $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ por

$$\mu^*(E) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \ E_n \in \mathcal{B}_0 \right\}.$$

Não é difícil ver que μ^* é uma medida exterior.

- Seja $\mathcal{B} := \{ E \subset X : E$ é mensurável à Carathéodory com respeito a $\mu^* \}$.

Pelo teorema de extensão de Carathéodory, $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e $\mu := \mu^*|_{\mathcal{B}}$ é uma medida.

Portanto, resta provar que μ é uma extensão de μ_0, ou seja,

(i) $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ (o que vai implicar $\sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}$)

(ii) $\mu_0(E) = \mu^*(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}_0$.

Começamos com (i). Sejam $E \in \mathcal{B}_0$ e $A \subset X$.
Temos que provar o seguinte

$$(1) \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Podemos supor que $\mu^*(A) < \infty$ (caso contrário, (1) seja evidente).

Fixe $\varepsilon > 0$. Então existem $E_n \in \mathcal{B}_0$, $n \geq 1$, tais que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $E_n \in \mathcal{B}_0$, $\forall n \geq 1$, tem-se

$$A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap E$$

e $E_n \cap E \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$ ($\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana).

Logo,

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E \cap E_n) \qquad (2)$$

Do mesmo jeito, $A \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus E$

$$E_n \setminus E \in \mathcal{B}_0 \ \forall n \geq 1.$$

Logo, $\mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E \setminus E_n) \qquad (3)$

Usando (2) e (3) segue que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_0(E_n \cap E) + \mu_0(E_n \setminus E) \right)$$

$$= \sum_{n=1} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon,$$

porque $E_n = (E_n \cap E) \sqcup (E_n \setminus E)$,

$E_n, E_n \cap E, E_n \setminus E \in \mathcal{B}_0$

e μ_0 é uma pré-medida (então é aditiva)

Quando $\varepsilon \to 0$, $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A)$,

provando (1).

(ii) Provaremos que $\mu_0(E) = \mu^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_0$.

Como $\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n ,\ E_n \in \mathcal{B}_0 \right\}$

e $E \in \mathcal{B}_0$, segue que $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$.

Resta provar que $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

Seja $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}_0$ uma cobertura de E.

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow E = E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap E_n)$$

Note que $F_n := E \cap E_n \in \mathcal{B}_0 \quad \forall n \geq 1$.

Então, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \in \mathcal{B}_0$, $E \in \mathcal{B}_0$,
$F_n \subset E_n$

e como μ_0 é uma pré-medida,

$$\mu_0(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).$$

Como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ foi uma cobertura arbitrária de E por conjuntos em $\mathcal{B}_0$, segue que

$$\mu_0(E) \leq \mu^*(E) = \inf\left\{ \sum \mu_0(E_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \; E_n \in \mathcal{B}_0 \right\},$$

o que mostra a segunda afirmação.

Unicidade da extensão (sob a hipótese μ_0 é σ-finita).

Sejam $\mu, \nu : \sigma(\mathcal{B}_0) \to [0, \infty]$ tais que

$$\mu(E) = \mu_0(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}_0 .$$

Temos que provar: $\mu(E) = \nu(E) \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{B}_0)$.

Como μ_0 é σ-finita, existe uma sequência $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}_0$ t.q. $A_n \uparrow X$ e

$$\mu(A_n) < \infty \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Seja

$$\mathcal{B} := \{ E \in \sigma(\mathcal{B}_0) : \mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$$

$$\text{para todo } n \geq 1 \}.$$

Note que se $E \in \mathcal{B}$ então, pelo teorema da convergência monótona para conjuntos,

$$\mu(E) = \nu(E).$$

De fato, como $A_n \nearrow X$, $E \cap A_n \nearrow E \cap X = E$, portanto,

$$\mu(E \cap A_n) \nearrow \mu(E) \text{ e } \nu(E \cap A_n) \nearrow \nu(E).$$

$$\mathcal{B} := \{ E \in \sigma(\mathcal{B}_0) : \mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$$
$$\text{para todo } n \geq 1 \}.$$

Basta provar que $\mathcal{B}$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{B}_0$. Pelo lema da classe monótona, isso implicaria $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_0)$, logo para todo $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \nu(E)$, provando a unicidade da extensão.

- Dado $E \in \mathcal{B}_0$, como $E \cap A_n \in \mathcal{B}_0$ $\forall n \geq 1$, temos

$$\left.\begin{aligned} \mu(E \cap A_n) &= \mu_0(E \cap A_n) \\ \nu(E \cap A_n) &= \mu_0(E \cap A_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E \in \mathcal{B}.$$

• Seja $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{B}$, $E_k \nearrow E$. Então,

$$\mu(E_k \cap A_n) = \nu(E_k \cap A_n) \quad \forall n \geq 1 \ \forall k \geq 1.$$

Como $E_k \cap A_n \nearrow E \cap A_n$ quando $k \to \infty$,

pelo TCM,

$$\mu(E_k \cap A_n) \longrightarrow \mu(E \cap A_n)$$

$$\nu(E_k \cap A_n) \longrightarrow \nu(E \cap A_n)$$

Logo, $\mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$ para todo $n \geq 1$, então $E \in \mathcal{B}$.

- Seja $\{E_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{B}$, $E_k \searrow E$. Então

$$\mu(E_k \cap A_n) = \nu(E_k \cap A_n) \quad \forall n\geq 1 \ \forall k \geq 1.$$

Como $E_k \searrow E$, $E_k \cap A_n \searrow E \cap A_n$ quando $k \to \infty$.

Mas $\mu_0(E_k \cap A_n) \leq \mu_0(A_n) < \infty$, então

o TCM para baixo é aplicável e implica:

$$\mu(E_k \cap A_n) \to \mu(E \cap A_n) \quad k \to \infty$$
$$\nu(E_k \cap A_n) \to \nu(E \cap A_n)$$

Logo, $\mu(E \cap A_n) = \nu(E \cap A_n)$ $\forall n \geq 1$, então $E \in \mathcal{B}$.

$\blacksquare$

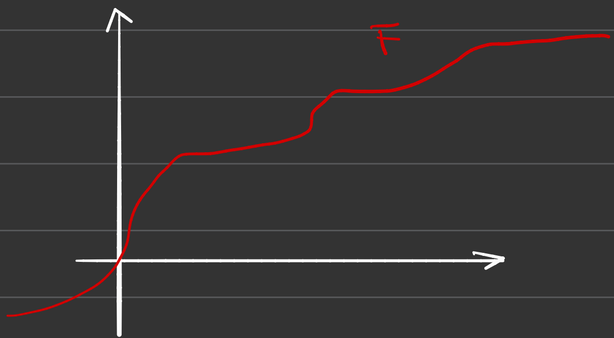
Aplicações importantes do teorema de extensão de Kolmogorov:

- a medida de Lebesgue - Stieltjes
- a medida produto (medidas de Bernoulli, de Markov).

A medida de Lebesgue-Stieljes

Teorema (de existência da medida de L-S)

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e de classe C^1.



Então existe uma única medida de Borel

$m_F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ tal que

$$m_F\big([a,b]\big) = F(b) - F(a)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Além disso, $\boxed{d m_F = F' \, dm}$ no sentido que

$$m_F(E) = \int_E F' \, dm \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ademais,

$$\int \varphi \, dm_F = \int \varphi \cdot F' \, dm$$

para toda função mensurável $\varphi \geq 0$ e para toda função $\varphi \in L^1(dm_F)$.

<u>Prova</u> (esboço). Provaremos a primeira parte: a existência e unicidade de m_F.

Dado um intervalo finito I com pontos extremos a e b, $a \leq b$, seja

$$\mu_0(I) := F(b) - F(a) < \infty$$

$$\mu_0(-\infty, a] := F(a) - \inf_{y \in \mathbb{R}} F(y)$$

$$\mu_0(a, \infty) := \sup_{y \in \mathbb{R}} F(y) - F(a).$$

Se $I_1, \dots, I_k$ são intervalos disjuntos (finitos ou infinitos)

$$\mu_0(I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k) := \mu_0(I_1) + \dots + \mu_0(I_k).$$

Seja

$$\mathcal{B}_0 := \{ I_1 \cup \dots \cup I_k : I_1, \dots, I_k \text{ são intervalos finitos ou infinitos e } k \geq 1 \}.$$

Então $\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana e μ_0 é uma pré-medida σ-finita em $\mathcal{B}_0$ (exercício).

Pelo teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov, existe uma única medida m_F em $\sigma(\mathcal{B}_0) = \sigma(\mathbb{R})$ que coincide com μ_0 em $\mathcal{B}_0$. Em particular,

$$m_F([a,b]) = F(b) - F(a) \quad \forall a \leq b,$$

provando a primeira parte do teorema.

Segunda parte:

Lembre-se que dados $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f \geq 0$ uma função mensurável temos

$$\mu_f : \mathcal{B} \to [0, \infty],$$

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

é uma medida.

Note que se $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = 0$ então $\mu_f(E) = 0$.

Então, $E \mapsto \int_E F' \, dm$ é uma medida de Borel.

Como m_F é a <u>única</u> medida de Borel tal que

$$m_F[a,b] = F(b) - F(a)$$

Basta mostrar que

$$\boxed{\int_{[a,b]} F' \, dm = F(b) - F(a).}$$

Como $F \in C^1[a,b]$, F' é contínua, portanto F' é integrável à Lebesgue e à Riemann e

$$\int_{[a,b]} F' \, dm = \int_a^b F' \, dm = F(b) - F(a),$$

pelo segundo teorema fundamental do cálculo (TFC II).

provando (1).

Para provar que

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm_F = \int_{\mathbb{R}} f F' \, dm_F$$

usamos o mecanismo padrão.

- $f = 1_E$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}} 1_E \, dm_F = m_F(E)$$

$$\int_{\mathbb{R}} 1_E \cdot F' \, dm_F = \int_E F' \, dm_F$$

Pela fórmula (1), $\int_{\mathbb{R}} 1_E \, dm_F = \int_{\mathbb{R}} 1_E \cdot F' \, dm$.

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm_F = \int_{\mathbb{R}} f F' \, dm$$

- $f = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i}$, $c_i \geq 0$, $E_i \in \mathcal{B}$.

Use o passo anterior e a linearidade da integral.

- f mensurável sem sinal. Existe $s_n \nearrow f$ em todo ponto. funções simples

Pelo TCM, $\int s_n \, dm_F \to \int f \, dm_F$

Como $F' \geq 0$, $s_n \cdot F' \nearrow f \cdot F'$. Pelo TCM,

$$\int s_n F' \, dm \to \int f \cdot F' \, dm.$$

Pelo passo anterior,

$$\int s_n \, dm_F = \int s_n F' \, dm \quad \forall n \geq 1$$

logo, $\int f \, dm_F = \int f F' \, dm$.

- Seja $f \in L^1(dm_F)$. Então $f = f^+ - f^-$, onde $f^+, f^- \geq 0$ mensuráveis.

Temos também que $f \cdot F' = f^+ F' - f^- F'$,

e $f^+ F' \geq 0$, $f^- F' \geq 0$ são mensuráveis.

Pelo passo anterior,

$$\infty > \int f^+ \, dm_F = \int f^+ F' \, dm$$

$$\infty > \int f^- \, dm_F = \int f^- F' \, dm$$

Então,
$$\int |f F'| \, dm = \int |f| F' \, dm =$$
$$= \int f^+ F' \, dm + \int f^- F' \, dm < \infty,$$
logo $f F' \in L^1(dm)$. Finalmente,
$$\int f F' \, dm = \int f^+ F' \, dm - \int f^- F' \, dm = \int f^+ \, dm_F -$$
$$- \int f^- \, dm_F = \int f \, dm_F. \qquad \blacksquare$$

Observação Se $F(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$m_F = m.$$

Observação A construção da medida de Lebesgue-Stieltjes m_F é válida para funções F mais gerais.

A medida produto (finito)

Sejam $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$ dois espaços mensuráveis. Um conjunto do tipo

$$E \times F$$

onde $E \in \mathcal{B}_X$ e $F \in \mathcal{B}_Y$ é chamado de cilindro.

Seja $$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i : \begin{array}{l} E_i \in \mathcal{B}_X \\ F_i \in \mathcal{B}_Y \end{array} \right\}.$$

Então, $\mathcal{B}_0$ é uma álgebra booleana.

Definimos

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y := \sigma(\mathcal{B}_0)$$

$=$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros

chamada da σ-álgebra produto.

Então, $(X \times Y, \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y)$ é chamado o espaço mensurável produto.

Ex $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \times (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

mas $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \times (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \neq (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$

Teorema (existência da medida produto)

Sejam $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ dois espaços de medida σ-finita. Então existe uma única medida $\mu_X \times \mu_Y$ em $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ tal que

$$\mu_X \times \mu_Y (E \times F) = \mu_X(E) \cdot \mu_Y(F).$$

para todo $E \in \mathcal{B}_X$ e $F \in \mathcal{B}_Y$.

<u>Prova</u> Definimos $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0,\infty]$,

$$\mu_0(E \times F) := \mu_X(E) \cdot \mu_Y(F)$$

para todo $E \in \mathcal{B}_X$ e $F \in \mathcal{B}_Y$

e

$$\mu_0\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i \right) := \sum_{i=1}^{k} \mu_0(E_i \times F_i).$$

Vamos provar que μ_0 é uma pré-medida σ-finita.

Sejam $S \in \mathcal{B}_0$, $\{S_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}_0$ t.q.

$$S = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que S, $\{S_n\}_{n\geq 1}$ sejam cilindros:

$$S = E\times F, \qquad S_n = E_n \times F_n, \qquad n\geq 1.$$

Então
$$E\times F = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\times F_n. \qquad (1)$$

Temos que provar o seguinte:

$$\mu_0(E\times F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n\times F_n)$$

Mas $\mu_0(E\times F) = \mu_X(E)\,\mu_Y(F)$ e
$\mu_0(E_n\times F_n) = \mu_X(E_n)\,\mu_Y(F_n) \quad \forall n\geq 1.$

Note que $\mathbb{1}_{E\times F}(x,y) = \mathbb{1}_E(x)\,\mathbb{1}_F(y)$

e $\mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\geq 1} S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_n}$

Logo, (1) é equivalente a

$$\mathbb{1}_E(x)\,\mathbb{1}_F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}(x)\,\mathbb{1}_{F_n}(y).$$

Fixe $y \in Y$ e aplique o teorema de Tonelli (em x):

$$\int_X \mathbb{1}_E(x)\,\mathbb{1}_F(y)\,d\mu_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbb{1}_{E_n}(x)\,\mathbb{1}_{F_n}(y)\,d\mu_X(x)$$

$$\mu_X(E)\,1_F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(E_n)\,1_{F_n}(y)$$

para todo $y \in Y$.

Aplicando o teorema de Tonelli em y, segue que

$$\int_Y \mu_X(E)\,1_F(y)\,d\mu_Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \mu_X(E_n)\,1_{F_n}(y)\,d\mu_Y(y)$$

logo

$$\mu_X(E)\,\mu_Y(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(E_n)\,\mu_Y(F_n),$$

Provando que μ_0 é uma premedida.

Como μ_X e μ_Y são σ-finitas, existem

$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}_X$, $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}_Y$, com

$$\mu_X(A_n) < \infty, \quad \mu_Y(B_n) < \infty \quad \forall n \geq 1$$

e $A_n \nearrow X$, $B_n \nearrow Y$

Então, $\bigcup_{n\geq 1} (A_n \times B_n) = X \times Y$

e $\mu_0(A_n \times B_n) = \mu_X(A_n)\,\mu_Y(B_n) < \infty$,

provando que μ_0 é σ-finita.

Pelo teorema de extensão de Kolmogorov concluímos a existência e a unicidade da medida produto. $\square$

Teorema (de Tonelli) Sejam $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X), (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ dois espaços de medida σ-finita e seja

$$f : X \times Y \to [0, \infty]$$

uma função $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ - mensurável.

Então,

$$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y) \quad \text{é mensurável e}$$

$$(*) \int_{X \times Y} f(x,y)\, d\mu_X \times d\mu_Y = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x)$$

<u>Prova</u> (esboço) Como μ_X, μ_Y são σ-finitas, existem $A_n \nearrow X$, $B_n \nearrow Y$ mensuráveis, de medidas finitas.

Então,

$$A_n \times B_n \nearrow X \times Y,$$

e usando o TCM, podemos supor, sem perda de generalidade que

$$\mu_X(X) < \infty, \quad \mu_Y(Y) < \infty$$

(medidas finitas)

Usemos o mecanismo padrão.

① $f = 1_S$, $S \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \sigma(\text{cilindros})$

Seja $\mathcal{C} = \{ S \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y : (*) \text{ vale para } 1_S \}$.

- $S = E \times F \in \mathcal{C}$ $\forall E \in \mathcal{B}_X, F \in \mathcal{B}_Y$.

$$\int_{X \times Y} 1_{E \times F} \, d\mu_X \times d\mu_Y = \mu_X \times \mu_Y (E \times F)$$

$$= \mu_X(E) \, \mu_Y(F)$$

Por outro lado,

$$\int_X \left(\int_Y 1_E(x)\, 1_F(y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x) =$$

$$= \int_X 1_E(x)\, \mu_Y(F)\, d\mu_X(x)$$

$$= \mu_X(E)\, \mu_Y(F)$$

- $S = \bigsqcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i$ use a linearidade da integral.

- Seja $\{S_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}$ t.q $S_n \uparrow S$ ou $S_n \downarrow S$

Pelo TCM, $S \in \mathcal{C}$.

Portanto, $\mathcal{C}$ é uma classe monótona que contém $\mathcal{B}_0$, e pelo lema da classe monótona,

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y.$$

Provemos o teorema de Tonelli vale para toda função indicadora 1_S, $S \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$.

(2) f simples: use a linearidade.

(3) Use o TCM para concluir que $(*)$ vale para toda função mensurável sem sinal f. $\square$

<u>Teorema</u> (de Fubini) O mesmo resultado vale se $f \in L^1(\mu_X \times \mu_Y)$.

<u>prova</u> Escreva $f = f^+ - f^-$, $f^+, f^- \geq 0$ e aplique Tonelli às funções f^+, f^-. $\square$

Produtos infinitos

Sejam $(X_n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$, $n \geq 1$ espaços de probabilidade.

Seja $X = \prod_{n \geq 1} X_n = \{x = \{x_n\}_{n \geq 1} : x_n \in X_n\}$.

Cilindro

$$C[E_1, \dots, E_k] = \{\{x_n\}_{n \geq 1} : \begin{array}{l} x_1 \in E_1 \\ x_2 \in E_2 \\ \dots \\ x_k \in E_k \\ x_n \in X_n, \ \forall n \geq k \end{array}\}$$

$E_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, E_k \in \mathcal{B}_k$

$$= E_1 \times \dots \times E_k \times X_{k+1} \times X_{k+2} \times \dots$$

$\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \sigma$ (cilindros)

$$\mu_0(C[E_1,\dots,E_k]) := \mu_1(E_1)\cdot\ldots\cdot\mu_k(E_k)$$

$$C[E_1 \dots E_k] = E_1\times E_2\times\dots\times E_k\times X_{k+1}\times\dots\times X_n\times\dots$$

$$\mu_0\Big(\bigsqcup_{l=1}^{m} C_l\Big) := \sum_{l=1}^{m}\mu_0(C_l)$$

↳ cilindros.

Então, μ_0 é uma pré-medida em

$$\mathcal{B}_0 := \Big\{\bigsqcup_{l=1}^{m} C_l : C_l \text{ cilindros}\Big\}.$$

(álgebra booleana)

Pelo teorema de extensão de Kolmogorov,

existe uma única medida (de probabilidade)

$$\mu : \sigma(\text{cilindros}) \to [0,1] \quad \text{t.q.}$$

$$\mu(\text{cilindro}) = \mu_0(\text{cilindro}).$$

μ é chamada de medida produto, ou de Bernoulli.