Aula 29 Revisão para a segunda prova

I Espaços de medida abstratos

- σ- álgebras e espaços mensuráveis
- medidas abstratas
- funções mensuráveis

- a integral de uma função mensurável num espaço de medida abstrato

- os teoremas de convergência:

TCM, Tonelli, Borel-Cantelli, Fatou, TCD

- modos de convergência
- espaços L^p

II. O teorema de L-R-N

e o teorema de R-N

- medida absolutamente contínua com respeito a uma medida referência.
- medidas singulares

III. Construção abstrata de medidas

- O teo de extensão de Caratheodory
- O teo de extensão de Kolmogorov.

exemplos: medida de Lebesgue-Stiljes

medida produto.

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida

X conjunto

$\mathcal{B} \subset 2^X$ σ-álgebra

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida

$$\mu(\phi) = 0$$

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

ex $a \in X$

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in E \\ 0 & \text{se } a \notin E \end{cases}$$

medida de Dirac

medida finita : $\mu(X) < \infty$

medida de probabilidade : $\mu(X) = 1$

Def $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável se

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B} \quad \forall\, U \text{ aberto } \subset \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B} \quad \forall\, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

---

função simples: $\displaystyle s = \sum_{i=1}^{K} c_i \, 1_{E_i}, \quad E_i \in \mathcal{B}$

$c_i \in \mathbb{R}$.

Teo $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável

$$\Updownarrow$$

$$\{f > \lambda\} \in \mathcal{B} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\, \{s_n\}_{n \geq 1}$ sequência de funções simples t.q.

$s_n \longrightarrow f$ em todo ponto

Teo $f : X \to \mathbb{R}$ mens $\Longleftrightarrow$ f^+ e $f^- : X \to [0, \infty)$

são mensuráveis

A construção da integral de uma função mensurável

$$f : X \to \mathbb{R} \qquad (X, \mathcal{B}, \mu)$$

$$\int_X 1_E \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \mu(E)$$

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, 1_{E_i}$$

$$\int_X s \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mu(E_i)$$

$$s \geq 0, \quad \text{depois} \quad \int_X |s| \, d\mu < \infty$$

- $f : X \to [0,\infty]$ mens.

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \int_X s\,d\mu \;:\; \begin{array}{c} 0 \le s \le f \\ \text{simples} \end{array} \right\}$$

- $f : X \to \mathbb{R}$ mens, se $\displaystyle\int_X |f|\,d\mu < \infty$

então $$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu.$$

$$L^1(\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : \text{mensurável}, \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\} \Big/ \sim$$

$$f \sim g \;:\; f = g \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

$\left(L^1(\mu), \|\cdot\|_1 \right)$ é um espaço normado (de Banach)

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$$

Propriedades básicas da integral

- positividade: $f \geq 0$ μ-q.t.p.

$$\Rightarrow \int_X f \, d\mu \geq 0$$

- monotonicidade: se $f \leq g$ μ-q.t.p.

então $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

- linearidade

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu .$$

Markov $\quad f : X \to [0, \infty]$ mens.

$$\lambda > 0$$

$$\mu\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda}$$

Consequências $\quad \int |f| \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-qtp}$

Se $\int_X |f| \, d\mu < \infty \implies f < \infty \quad \mu\text{-qtp}.$

Os teoremas de convergência

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida

$\{f_n\}$ mensuráveis, f mens.

$$f_n \to f \quad \mu\text{-q.t.p}$$

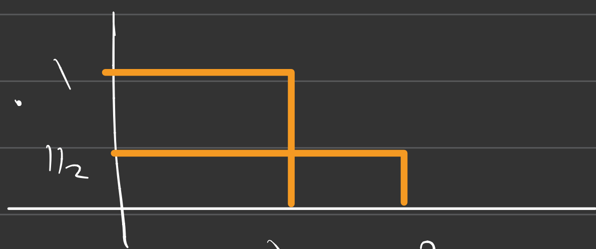
$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad \int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu \quad ?$$

Exemplos de funções bump em movimento

• 

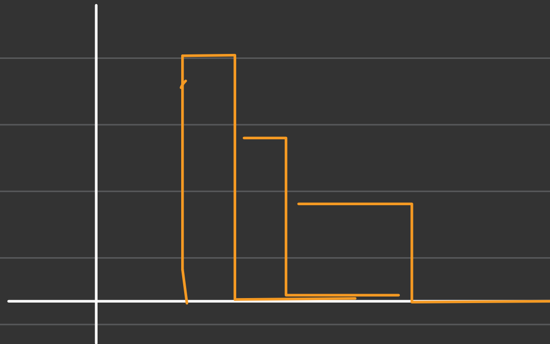
$$\mathbb{1}_{[n,n+1]} \longrightarrow 0$$

mas $\int \mathbb{1}_{[n,n+1]}\,dx = 1 \not\to 0$

• 

$$\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]} \longrightarrow 0 \text{ unif.}$$

mas $\int \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]} = 1 \not\to 0$



$$n \cdot 1_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} \longrightarrow 0$$

meas

$$\int n \, 1_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} = 1 \not\to 0 .$$

TCM $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots \le f_n \le f_{n+1} \le \dots$

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n = \sup_{n \ge 1} f_n$$

$$\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$$

Tonelli: $f_n \ge 0$, mens.

$$\Rightarrow \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Lema de Borel - Cantelli:

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{B}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

Então, para μ-q.t.p. $x \in X$

$$\#\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\} < \infty$$

Lema de Fatou $\quad f_n : X \to [0,\infty]$ mens. $n \geq 1$

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

TCD $\quad f_n : X \to \mathbb{R}$ mens, $n \geq 1$

$f_n \to f$ μ-qtp. se $|f_n| \leq g \in L^1$

$$\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu \quad \left(e \;\; f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \right)$$

Modos de convergência

$(X, \mathcal{B}, \mu)$

$f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mens, $n \geq 1$

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mens.

$$f_n \longrightarrow f$$ em vários sentidos

- μ-qtp
- essencialmente uniforme (ou em L^∞)
- em média L^p $(1 \leq p < \infty)$
- em medida.

Def $f_n \longrightarrow f$ en L^∞ se

$\exists Z \in \mathcal{B}$, $\mu(Z) = 0$ t.q.

$f_n \longrightarrow f$ unif. en Z^c.

Def $f_n \to f$ en L^p $1 \le p < \infty$:

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0$$

Def $f_n \to f$ em medida:

$\forall \delta > 0$

$$\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$.

Em geral,

$$f_n \to f \text{ em } L^\infty \Rightarrow f_n \to f \ \mu\text{-qtp}$$

$$\Downarrow$$

$$f_n \to f \text{ em medida}$$

$$\Uparrow \quad \text{(chebyshev)}$$

$$f_n \to f \text{ em } L^p$$

$$1 \leq p < \infty$$

Se $\underline{\mu(X) < \infty}$ (por exemplos, se μ é uma medida de probabilidade)

- $f_n \to f$ em L^∞

$$\Downarrow$$

$f_n \to f$ em L^1

então conv. em L^∞ é a mais forte.

- $f_n \to f$ μ-qtp $\Rightarrow$ $f_n \to f$ em medida

Egorov

$f_n \to f$ μ-q.t.p. $\iff$ $f_n \to f$ quasi uniforme

Os espaços L^p $1 \le p \le \infty$.

$p = 1$

$$L^1(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ mens}, \int |f| \, d\mu < \infty \} / \equiv \text{q.t.p.}$$

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$$

$(L^1(X), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.

- $1 \leq p < \infty$

$$L^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ mens}, \ \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\} \Big/ \equiv \text{qtp}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ espaço normado

de Banach.

- $p = \infty$

$$L^\infty(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \ : \ \text{mens.} \quad \|f\|_\infty < \infty \}$$

ou seja, $\{ \exists Z \in \mathcal{B},\ \mu(Z) = 0$

$\exists\, C < \infty$ t.q.

$$|f(x)| \leq C \quad \forall x \in Z^c$$

essencialmente limitada.

$$\|f\|_\infty := \inf \{ C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \quad \mu\text{-q.t.p. } x \in X \}$$

Então, $\left(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty \right)$ é um espaço de Banach.

<u>Hölder</u>: Se $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

então

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Obs: se $f \in L^1(X)$, $g \in L^1(X)$ $\not\Rightarrow$ $f \cdot g \in L^1(X)$

Mas se $f, g \in L^2(X) \Rightarrow f \cdot g \in L^1(X)$

por que $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty$.

Obs: $\mu(X) < \infty \Rightarrow L^\infty(X) \subset L^p(X) \subset L^1(X)$

Os teoremas de Lebesgue, Radon, Nikodym

$(X, \mathcal{B}, m)$ espaço de medida de referência

m σ-finita.

μ outra medida em $(X, \mathcal{B})$

σ-finita

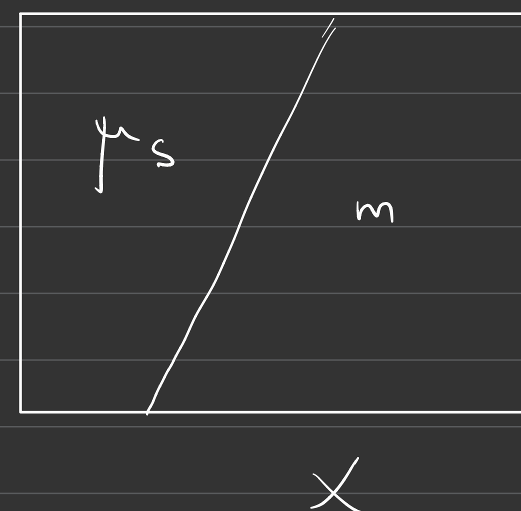
<u>Teo</u> (L-R-N)

$\Rightarrow \exists!$ decomposição $\mu = m_f + \mu_s$

onde $\quad f : X \to [0, \infty]$ mens,

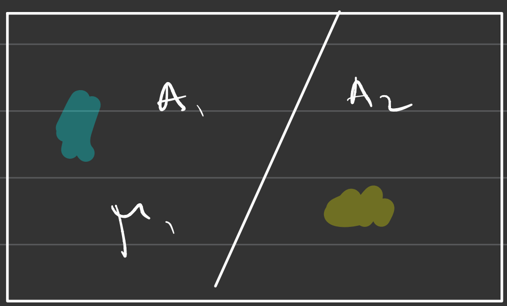
$$m_f(E) = \int_E f \, dm \quad \forall E \in \mathcal{B}$$

e $\quad \mu_s \perp m$



Def $\mu_1 \perp \mu_2$ (singulares)

Se existir uma partição $X = A_1 \sqcup A_2$



t.q. $\mu_1(A_2) = 0$

e $\mu_2(A_1) = 0$

Def Uma medida μ é absolutamente contínua com respeito a m,

$$\mu \ll m$$

Se $m(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$

$(\forall E \in \mathcal{B})$

Obs $m_f \ll m$

$$m_f(E) = \int_E f \, dm$$

<u>Teo</u> (R-N)

$\mu \ll m$ sse $\exists f : X \to [0, \infty)$ mens.

t.q. $\mu = m_f$.

<u>Teo</u> L-R-N $\iff$ dada μ $\exists!$ dec.

$\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ onde

$\mu_{ac} \ll m$ e $\mu_s \perp m$.

<u>Q</u> : Se $m = \delta_a$

O que significa $\mu \ll \delta_a$?

$\mu \perp \delta$