

**AULA 1: O PROBLEMA DE MENSURABILIDADE.
MEDIDA ELEMENTAR.**

Já estamos familiarizados com um outro tipo de integral, a integral de Riemann. No entanto, a integral de Riemann é insuficiente na análise matemática.

Exemplo 1. Considere a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função *não* é integrável à Riemann. De fato, dada qualquer partição

$$\mathcal{P} = (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1)$$

de $[0, 1]$, como cada subintervalo $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ contém pontos racionais e irracionais, as somas de Darboux superior e inferior correspondentes são

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n |I_j| = 1, \\ \underline{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \inf_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = 0. \end{aligned}$$

Além disso, considere uma enumeração $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots\}$ de \mathbb{Q} e define, para todo $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sequência de funções $\{f_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

$f_n(x)$ é integrável à Riemann para todo $n \geq 1$ (já que f_n possui um número *finito* de pontos de descontinuidade),

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Contudo, a função f , que é o *limite* (pontual, monótono) da sequência de funções integráveis a Riemann $\{f_n\}_{n \geq 1}$, não é integrável à Riemann.

Portanto, precisamos de um conceito de integração mais flexível, que é fechado com respeito a tais limites.

A TEORIA DE JORDAN-RIEMANN-DARBOUX

O problema de mensurabilidade. O espaço de referência é \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3, \dots$). O objetivo é definir um conceito de medida “física” aplicável a uma ampla coleção de conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$, a ser chamados de *conjuntos mensuráveis*.

Os conjuntos do espaço euclidiano mais fáceis de medir são *caixas* retangulares, para quais o volume (respectivamente, o comprimento em dimensão um ou área em dimensão dois) representa uma medida física natural.

Mais geralmente,

- (i) O que significa para um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ ser mensurável?
- (ii) Se E é mensurável, qual é a sua medida?
- (iii) Que propriedades básicas (ou axiomas) devem ser satisfeitas por uma medida? Por exemplo, se E é a reunião disjunta entre dois conjuntos mensuráveis E_1 e E_2 , qual deveria ser a relação entre suas medidas?

Começamos com a medida de Jordan, relacionada à integral de Riemann; depois disso apresentaremos um conceito de medida mais refinado, a medida de Lebesgue, que nos permitirá definir a integral de Lebesgue.

Medida elementar. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, i.e. um intervalo do tipo $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ ou $(a, b]$. Define o seu comprimento por $|I| := b - a$.

Uma *caixa* em \mathbb{R}^d é um produto cartesiano

$$B = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$$

de intervalos limitados. Define seu volume por $|B| := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \dots \cdot |I_d|$.

Definição 1. Um *conjunto elementar* $E \subset \mathbb{R}^d$ é qualquer união *finita* de caixas

$$E = B_1 \cup \dots \cup B_n.$$

Exercício 1. Se $E, F \subset \mathbb{R}^d$ são conjuntos elementares, então $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$, $E \Delta F$ são conjuntos elementares também.

Além disso, qualquer translação

$$E + a := \{x + a : x \in E\},$$

onde $a \in \mathbb{R}^d$ e E é um conjunto elementar, também é um conjunto elementar.

Lema 1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar qualquer.*

- (i) *E pode ser escrito como uma união disjunta de caixas.*
- (ii) *Se $E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ e $E = B'_1 \sqcup \dots \sqcup B'_m$ são duas representações de E como uniões disjuntas de caixas, então*

$$|B_1| + \dots + |B_n| = |B'_1| + \dots + |B'_m|.$$

Demonstração. Vamos fazer a prova em dimensão $d = 1$. O argumento em dimensão maior é similar (exercício).

(i) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto elementar, isto é, uma união finita de intervalos limitados I_1, \dots, I_n . Então

$$\begin{aligned} E &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_n \\ &= I_1 \sqcup (I_2 \setminus I_1) \sqcup (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \sqcup \dots \sqcup (I_n \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{n-1})). \end{aligned}$$

Então basta provar a seguinte afirmação: dados quaisquer intervalos limitados I, I_1, \dots, I_k , o conjunto

$$I \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k)$$

pode ser descrito como uma união finita de intervalos disjuntos.

Observe que a interseção entre um intervalo limitado e um intervalo qualquer é sempre um intervalo limitado. Além disso, o complemento de um intervalo limitado é uma união de dois intervalos disjuntos (não limitados).

Então, como

$$I \setminus I_1 = I \cap I_1^c$$

temos que $I \setminus I_1$ é uma união de dois (então finita) intervalos disjuntos e limitados.

Além disso,

$$I \setminus (I_1 \cup I_2) = I \cap (I_1 \cup I_2)^c = I \cap I_1^c \cap I_2^c = (I \cap I_1^c) \cap I_2^c$$

que, pelo argumento anterior, será uma união finita (de no máximo quatro) intervalos limitados disjuntos.

Por indução, concluímos que o conjunto $I \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k)$ pode ser descrito como uma união finita de intervalos limitados disjuntos.

(ii) Vamos usar um argumento de discretização: dado qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$,

$$(1) \quad |I| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N},$$

onde

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} := \left\{ \frac{k}{N} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De fato, se $I = (a, b)$, para todo $N \geq 1$ sejam $k_N, l_N \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{k_N}{N} \leq a < \frac{k_N + 1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{l_N}{N} < b \leq \frac{l_N + 1}{N}.$$

Note que $\frac{k_N}{N} \rightarrow a$ e $\frac{l_N}{N} \rightarrow b$ quando $N \rightarrow \infty$.

Segue que

$$(a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{k_N + 1}{N}, \dots, \frac{l_N}{N} \right\},$$

então

$$\# \left((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) = l_N - k_N.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\#(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N} &= \frac{\#((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N} \\ &= \frac{l_N - k_N}{N} = \frac{l_N}{N} - \frac{k_N}{N} \rightarrow b - a = |I|, \end{aligned}$$

mostrando (1).

Seja $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$. Como os intervalos I_1, \dots, I_n são disjuntos, dado qualquer $N \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \# \left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) &= \# \left((I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) \\ &= \# \left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) + \dots + \# \left(I_n \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados acima por N , passando ao limite quando $N \rightarrow \infty$ e usando (1), concluímos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N} = |I_1| + \dots + |I_n| .$$

A expressão

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N}$$

não depende da representação $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$ de E como uma união disjunta de intervalos limitados, provando assim o nosso lema. \square

O lema anterior nos permite definir a medida de um conjunto elementar.

Definição 2. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar, e seja $E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ uma representação qualquer como união disjunta de caixas. Definimos a medida de E por

$$m(E) := |B_1| + \dots + |B_n| .$$