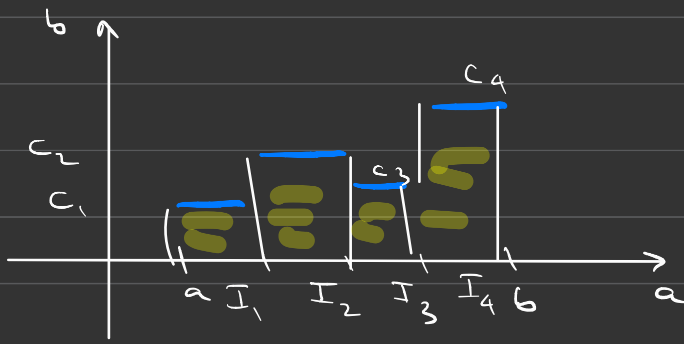
Aula 4 — A integral de Darboux

Definição Uma função $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada se existem uma partição

$$[a,b] = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$$

e constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$$s(x) = c_j \quad \text{se } x \in I_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$



Função indicadora $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$1_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Então uma função $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada sse

$$s = \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{I_j}$$

onde $\{I_1, \dots, I_n\}$ é uma partição de $[a,b]$.

Algumas propriedades da função indicadora:

(i) $\mathbb{1}_{E \cap F} = \mathbb{1}_E \cdot \mathbb{1}_F$

(ii) Se $E \cap F = \phi$ então

$$\mathbb{1}_{E \sqcup F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F$$

(iii) $E \subset F$ sse $\mathbb{1}_E \leq \mathbb{1}_F$

Def Seja $s = \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{I_j}$ uma função escada.

A integral de Darboux de s é definida por

$$\int_a^b s(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} c_j |I_j|$$

Obs Este conceito é bem definido, não depende da representação de s como combinação linear de funções indicadoras, ou seja:

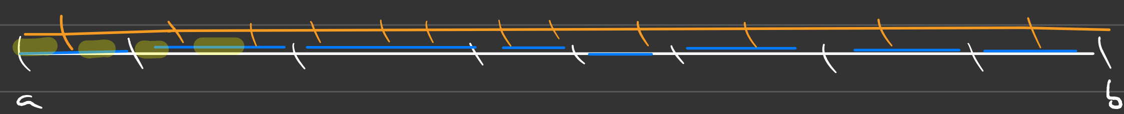
Se $s = \sum_{k=1}^{n} c_k I_k = \sum_{l=1}^{m} d_l J_l$

então $\sum_{k=1}^{n} c_k |I_k| = \sum_{l=1}^{m} d_l |J_l|$

De fato, considerando

$$\{ I_k \cap J_\ell : 1 \le k \le n,\ 1 \le j \le m,\ I_k \cap J_\ell \neq \emptyset \}$$

é uma partição mais fina de $[a,b]$.



Como $s = \sum_{k=1}^{n} c_k I_k = \sum_{\ell=1}^{m} d_\ell J_\ell$, se

$x \in I_k \cap J_\ell$ então $s(x) = c_k$

$s(x) = d_\ell \Rightarrow c_k = d_\ell$

Portanto,

$$S = \sum_{\substack{k,l: \\ I_k \cap J_l \neq \emptyset}} \overset{d_l}{\underset{\|}{}} c_k \, | I_k \cap J_l |$$

$$I_k = \bigsqcup_{l : I_k \cap J_l \neq \emptyset} I_k \cap J_l \quad \text{e} \quad J_l = \bigsqcup_{k : I_k \cap J_l \neq \emptyset} I_k \cap J_l$$

$$\Rightarrow |I_k| = \sum_l |I_k \cap J_l| \; ; \; |J_l| = \sum_k |I_k \cap J_l|$$

Logo,

$$\sum_{k} c_k |I_k| = \sum_{k} c_k \sum_{l} |I_k \cap J_l| = \sum_{\substack{k,l \\ I_k \cap J_l \neq \emptyset}} c_k \, |I_k \cap J_l|$$

$$\sum_{l} d_l |J_l| = \sum_{l} d_l \sum_{k} |I_k \cap J_l|$$

$$= \sum_{\substack{k,l: \\ I_k \cap J_l \neq \emptyset}} d_l \, |I_k \cap J_l|$$

Mas $c_k = d_l$ quando $I_k \cap J_l \neq \emptyset$, então

$$\sum_{k} c_k |I_k| = \sum_{l} d_l |J_l|.$$

$\blacksquare$

Proposição (propriedades básicas da integral de Darboux para funções escada)

Sejam $s, t : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções escada.

Então,

(i) linearidade: $s+t$ é uma função escada

e $\int_a^b (s+t) = \int_a^b s + \int_a^b t$

Se $c \in \mathbb{R}$ então cs é uma função escada

e $\int_a^b cs = c \int_a^b s$.

(ii) positividade: Se $s \geq 0$ então $\int_a^b s \geq 0$

(iii) monotonicidade: $s \leq t \Rightarrow \int_a^b s \leq \int_a^b t$

(iv) Se E é um conjunto elementar, então

1_E é uma função escada e

$$\int_a^b 1_E = m(E).$$

prova

(ii) evidente

exercício.

- Vamos provar a aditividade. Sejam

$$s = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{I_k} \qquad \Big| \qquad I_k = \bigsqcup_{\ell} I_k \cap J_\ell$$

e

$$t = \sum_{\ell=1}^{n} d_\ell 1_{J_\ell} \qquad \Big| \qquad \Rightarrow 1_{I_k} = \sum_{\ell} 1_{I_k \cap J_\ell}$$

Sempre podemos usar a mesma partição para duas funções escada:

$$s = \sum_{k} c_k 1_{I_k} = \sum_{k,\ell} c_k 1_{I_k \cap J_\ell}$$

$$t = \sum_{\ell} d_\ell 1_{J_\ell} = \sum_{k,\ell} d_\ell 1_{J_\ell \cap I_k}$$

Então, podemos representar: $\{K_1 - K_p\}$ partição de $[a,b]$

$$s = \sum_{i=1}^{p} a_i \, 1_{K_i}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} b_i \, 1_{K_i}$$

$$\Rightarrow \quad s + \sigma = \sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i) \, 1_{K_i}$$ $\Rightarrow$ $s+\sigma$ é uma função escada

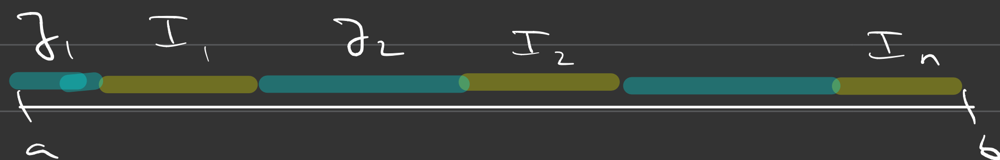
e $$\int_a^b (s+\sigma) = \sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i) \, |K_i|$$

$$= \sum a_i \, |K_i| + \sum b_i \, |K_i| = \int_a^b s + \int_a^b \sigma.$$

$\boxed{\text{QED}}$

(iv) Seja $E = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n \subset [a,b]$

um conjunto elementar.



$[a,b] \setminus E = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_m$

também é elementar

$\Rightarrow \{I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_m\}$ é uma partição de $[a,b]$ e

$1_E = 1 \cdot 1_{I_1} + \cdots + 1 \cdot 1_{I_n} + 0 \cdot 1_{J_1} + \cdots + 0 \cdot 1_{J_m}.$

$\Rightarrow$ 1_E é uma função escada e

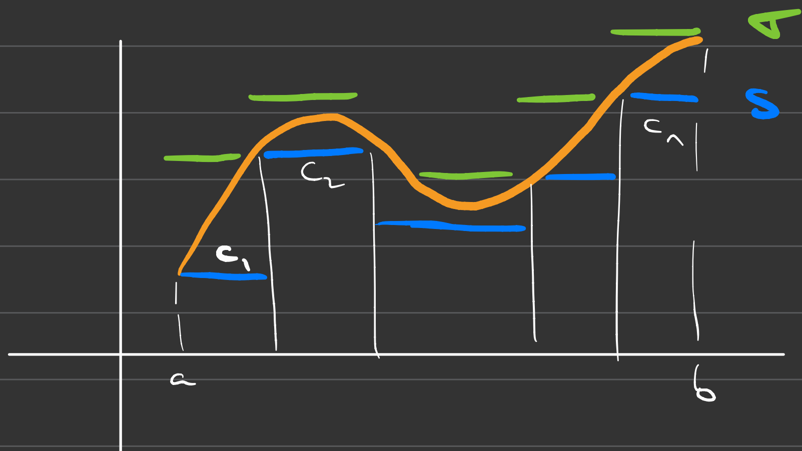
$$\int_a^b 1_E = 1 \cdot |I_1| + \dots + 1 \cdot |I_n|$$

$$+ 0 \cdot |J_1| + \dots + 0 \cdot |J_m|$$

$$= |I_1| + \dots + |I_n| = m(E).$$

$\square$

Definição Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.



Considere todas as funções escada

$$s \leq f$$

$$(e \quad \sigma \geq f)$$

Define

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \; : \; \underset{\text{função escada}}{s \leq f} \right\}$$

a integral de Darboux inferior de f.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\left\{ \int_a^b \sigma(x)\,dx : \sigma \geq f \text{ função escada} \right\}.$$

Claramente, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

f é chamada de Darboux integrável se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f =: \int_a^b f$$

Neste caso, o valor comum se chama a integral de Darboux de f.

Proposição Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada.

f é Darboux integrável sse $\forall \varepsilon > 0$ existem

$$s \le f \le \sigma$$

s, σ funções escada

t.q.

$$\int_a^b (\sigma - s) < \varepsilon$$

Prova exercício.

Proposição (as propriedades básicas da integral de Darboux)

(i) Linearidade: se f_1, f_2 são integ. à Darboux

$c \in \mathbb{R}$

então $f_1 + f_2$ e $c f_1$ também são, e

$$\int_a^b f_1 + f_2 = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$$

$$\int_a^b c f_1 = c \int_a^b f_1 .$$

(ii) positividade: $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

(iii) monotonicidade: $f \leq g$

$$\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

(iv) Seja $E \subset [a,b]$.

E é Jordan mensurável sse 1_E é Darboux integrável.

Neste caso,

$$\int_a^b 1_E = m(E).$$

Prova — exercício.

Aditividade: f_1, f_2 são Darboux integ.

Fixe $\varepsilon>0$. $\exists$ s_i, σ_i, $i=1,2$ funções escada

t. q.

$$s_i \le f_i \le \sigma_i$$

$$\text{e} \quad \int \sigma_i - \int s_i < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad s_1 + s_2 \le f_1 + f_2 \le \sigma_1 + \sigma_2$$

$s_1 + s_2$, $\sigma_1 + \sigma_2$ são funções escada.

Além disso,

$$\int \left[(\sigma_1 + \sigma_2) - (s_1 + s_2) \right] =$$

$$= \int (\sigma_1 - s_1) + \int (\sigma_2 - s_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Então, pela proposição anterior, $f_1 + f_2$ é integ. à Darboux.

Além disso, como $s_i \leq f_i \leq \sigma_i$ $\quad i = 1,2$

segue que $\int s_i \leq \int f_i \leq \int \sigma_i$

(pela def. da integral de Darboux)

$$\Rightarrow \int s_1 + \int s_2 \leq \int f_1 + \int f_2 \leq \int \sigma_1 + \int \sigma_2$$

$$\int s_1 + \int s_2 = \int (s_1 + s_2) \qquad \int \sigma_1 + \int \sigma_2 = \int (\sigma_1 + \sigma_2)$$

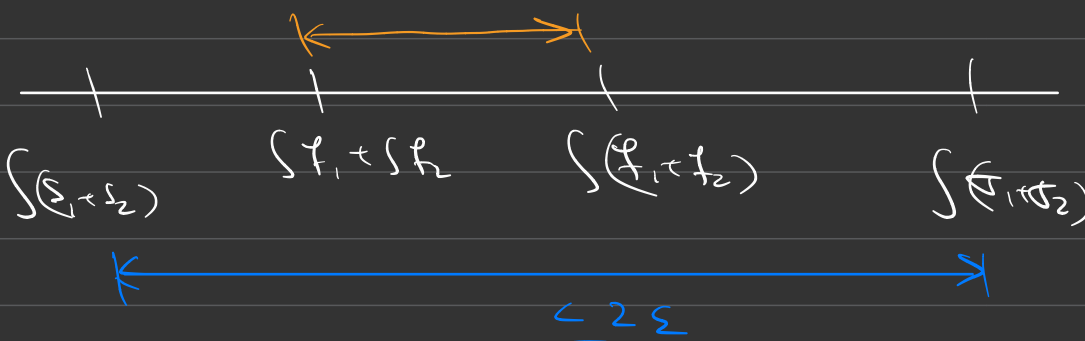
(1)

já que s_1, s_2, σ_1, σ_2 são funções escada.

Como $s_i \le f_i \le \sigma_i$, $i = 1, 2$

Segue que $s_1 + s_2 \le f_1 + f_2 \le \sigma_1 + \sigma_2$

(2) $\Rightarrow \int (s_1 + s_2) \le \int (f_1 + f_2) \le \int (\sigma_1 + \sigma_2)$



(1) + (2) implica

$$\left| \int f_1 + \int f_2 - \int (f_1 + f_2) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int (\sigma_1 + \sigma_2) - \int (s_1 + s_2) \right| \leq 2\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$

$\square$

(iv) E é Jordan mens. $\iff$ 1_E é Darboux integ.

(neste caso, $\int 1_E = m(E)$).

"$\Rightarrow$": Fixe $\varepsilon > 0$. Como E é Jordan mens.,

existem $A \subset E \subset B$

A, B elementares t.q.

$m(B) - m(A) < \varepsilon$.

$1_A \leq 1_E \leq 1_B$

A, B elementares $\Rightarrow$ $1_A, 1_B$ são funções escada e

$$\int 1_B - \int 1_A = m(B) - m(A) < \varepsilon$$

Além disso,

$$1_A \leq 1_E \leq 1_B$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \underset{m(A)}{\underset{\shortparallel}{\int 1_A}} \leq \int 1_E \leq \underset{m(B)}{\underset{\shortparallel}{\int 1_B}} \\ \\ A \subset E \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(E) \leq m(B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int 1_E - m(E) \right| \leq m(B) - m(A) < \varepsilon \rightarrow 0$$

$\blacksquare$

"$\Leftarrow$" Suponha que 1_E seja integrável à Darboux.

Vamos provar que E é Jordan mens.

Fixe $\varepsilon > 0$. Existe $s \leq 1_E \leq \sigma$

funções escada t.q.

$$\int \sigma - \int s < \varepsilon.$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{I_k} , \quad \sigma = \sum_{k=1}^{n} d_k 1_{I_k}$$

- $s = \sum_k c_k \mathbb{1}_{I_k}$, $s(x) \leq \mathbb{1}_E(x)$ $\forall x$

Seja

$$W_1 = \{ k : c_k > 0 \}$$

Se $k \in W_1$ então $I_k \subset E$ (1)

De fato, dado $x \in I_k$,

$$0 < c_k = s(x) \leq \mathbb{1}_E(x) \Rightarrow \mathbb{1}_E(x) = 1$$

$$\Rightarrow x \in E$$

Logo, $I_k \subset E$ e $c_k \leq 1$ (2)

Seja $A = \bigsqcup_{k \in W_1} I_k$ conjunto elementar

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} A \subset E$$

$$m(A) = \sum_{k \in W_1} |I_k| = \sum_{k \in W_1} 1 \cdot |I_k|$$

$$\geq \sum_{k \in W_1} c_k \cdot |I_k|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot |I_k| = \int s$$

(se $k \notin W_1$ então $c_k \leq 0$)

Então, $A \subset E$

A elementar

$m(A) \geq \int s$. $\qquad d_k \geq 0$

$\Uparrow$

- $\sigma = \sum_{k=1} d_k 1_{I_k}$, $\sigma \geq 1_E \geq 0$

Seja $W_2 := \{ k : I_k \cap E \neq \emptyset \}$

$B = \bigcup_{k \in W_2} I_k$ elementar. $\Rightarrow E \subset B$

Se $k \in W_2 \iff E \cap I_k \neq \emptyset$

então existe $x \in E \cap I_k$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 1_E(x) & \leq & \sigma(x) \\ \| & & \| \\ 1 & & d_k \end{array}$$

então $d_k \geq 1$

$$k \in W_2 \Rightarrow d_k \geq 1$$

$$B = \bigsqcup_{k \in W_2} I_k$$

$$m(B) = \sum_{k \in W_2} |I_k| = \sum_{k \in W_2} 1 \cdot |I_k|$$

$$\leq \sum_{k \in W_2} d_k \, |I_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} d_k \, |I_k| = \int \sigma$$

Logo,

$E \subset B$	$A \subset E$
B elementar	A elementar
$m(B) \leq \int \sigma.$	$m(A) \geq \int s$

$\Rightarrow$ $A \subset E \subset B$, A, B elementares

$$m(B) - m(A) \leq \int \sigma - \int s < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ E é Jordan mens.

$\boxed{}$