# AULA 9: MENSURABILIDADE À LEBESGUE
## CRITÉRIOS PARA MENSURABILIDADE, OS AXIOMAS DA MEDIDA

Vamos terminar a prova do último teorema da aula passada.

$\boxed{\text{ii}}$ Todo conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.

*Demonstração.* Seja $F \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto fechado. Para cada $n \geq 1$, seja

$$F_n := F \cap [-n, n]^d .$$

Note que os conjuntos $F_n$, $n \geq 1$ são compactos e $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n$. Portanto, basta provar que todo conjunto compacto $K$ é mensurável.

Seja $\epsilon > 0$. Pela regularidade exterior da medida externa, existe $U$ aberto tal que $U \supset K$ e

$$\mathrm{m}^\star(U) \leq \mathrm{m}^\star(K) + \epsilon .$$

O objetivo é provar que $\mathrm{m}^\star(U \setminus K) \leq \epsilon$, o que vai finalizar a prova.[1]

Como $U \setminus K = U \cap K^\complement$ é aberto, pelo Lema 3 da aula passada, $U \setminus K$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas fechadas (então compactas) e quase disjuntas: $U \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Pelo Lema 2 da aula passada,

$$\mathrm{m}^\star(U \setminus K) = \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| .$$

Portanto, basta provar que para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |Q_n| \leq \epsilon . \tag{1}$$

Fixe $N \geq 1$ e considere a união finita de caixas

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_N =: L .$$

Então, $L$ é compacto, $L \subset U \setminus K$ e assim,

$$K \cap L = \emptyset \quad \text{e} \quad K \cup L \subset U .$$

Pelo Exercício 1 e pelo Lema 1 da aula passada,

$$\mathrm{m}^\star(K \cup L) = \mathrm{m}^\star(K) + \mathrm{m}^\star(L) = \mathrm{m}^\star(K) + \sum_{n=1}^{N} |Q_n| . \tag{2}$$

Além disso,

$$\mathrm{m}^\star(K \cup L) \leq \mathrm{m}^\star(U) \leq \mathrm{m}^\star(K) + \epsilon . \tag{3}$$

Combinando (2) e (3) segue que

$$\mathrm{m}^\star(K) + \sum_{n=1}^{N} |Q_n| \leq \mathrm{m}^\star(K) + \epsilon ,$$

que implica (1) e finaliza a prova. □

[1] Enquanto a posteriori isso se tornará verdade, por enquanto, não sabemos que $\mathrm{m}^\star(U \setminus K) = \mathrm{m}^\star(U) - \mathrm{m}^\star(K)$.

$\boxed{\text{vi}}$ Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^\complement = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.

*Demonstração.* A ideia da prova é "quase preencher"o conjunto complementar $E^\complement$ por conjuntos fechados. Como $E$ é Lebesgue mensurável, para todo $n \geq 1$ existe um conjunto aberto $U_n$ tal que

$$E \subset U_n \quad \text{e} \quad \mathrm{m}^\star(U_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}\,.$$

Temos, claramente, que para todo $n \geq 1$, o conjunto $F_n := U_n^\complement \subset E^\complement$ e $F_n$ é fechado (portanto, mensurável). Seja

$$F := \bigcup_{n \geq 1} F_n\,.$$

Então, $F$ é mensurável e $F \subset E^\complement$. Vamos provar que $E^\complement \setminus F$ é negligenciável.

Como, para todo $n \geq 1$, $F_n \subset F$, temos

$$E^\complement \setminus F \subset E^\complement \setminus F_n = E^\complement \setminus U_n^\complement = U_n \setminus E\,,$$

segue que

$$0 \leq \mathrm{m}^\star\left(E^\complement \setminus F\right) \leq \mathrm{m}^\star\left(U_n \setminus E\right) \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Portanto, $\mathrm{m}^\star\left(E^\complement \setminus F\right) = 0$, e em particular, $E^\complement \setminus F$ é mensurável. Mas

$$E^\complement = F \cup \left(E^\complement \setminus F\right)\,,$$

monstrando a mensurabilidade de $E^\complement$. □

Seja

$$2^{\mathbb{R}^d} := \left\{A \colon A \subset \mathbb{R}^d\right\}$$

a família dos todos os subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^d$.

Note que as seguintes propriedades valem para conjuntos $A, B, C \in 2^{\mathbb{R}^d}$:

$A \triangle A = \emptyset$ .
$A \triangle A = B \triangle A$ .
$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$ .

Portanto, a diferença simétrica $\triangle$ parece uma "distância"em $2^{\mathbb{R}^d}$.

**Exercício 1.** Prove que

$$d(A, B) := \mathrm{m}^\star(A \triangle B)$$

é uma pseudo[2] métrica em $2^{\mathbb{R}^d}$.

**Teorema 1.** *(critérios para mensurabilidade) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $E$ é Lebesgue mensurável, ou seja, $E$ é* quase aberto por fora*: $\forall \epsilon > 0$ existe $U \supset E$ aberto tal que $\mathrm{m}^\star(U \setminus E) < \epsilon$.*

*(ii) $E$ está* perto de um aberto*: $\forall \epsilon > 0$ existe $U$ aberto tal que $\mathrm{m}^\star(U \triangle E) < \epsilon$.*

*(iii) $E$ é* quase fechado por dentro*: $\forall \epsilon > 0$, existe $F \subset E$ fechado tal que $\mathrm{m}^\star(E \setminus F) < \epsilon$.*

*(iv) $E$ está* perto de um fechado*: $\forall \epsilon > 0$ existe $F$ fechado tal que $\mathrm{m}^\star(F \triangle E) < \epsilon$.*

[2]No sentido que $d(A, B) = 0$ não necessariamente implica $A = B$.

*(v) $E$ está* perto de um mensurável*: $\forall \epsilon > 0$ existe $A$ mensurável tal que* $\mathrm{m}^\star(A \triangle E) < \epsilon$.

*Demonstração.* A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) é evidente, já que se $U \subset E$, então $U \triangle E = U \setminus E$. A implicação oposta é exercício. Idem a equivalência (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv), enquanto (iv) $\Longrightarrow$ (v) também é evidente. Então, resta provar as implicações (i) $\Longrightarrow$ (iii) e (v) $\Longrightarrow$ (ii).

$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(iii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Como $E$ é mensurável, $E^{\complement}$ também é mensurável, então existe um conjunto aberto $U \supset E^{\complement}$ tal que $\mathrm{m}^\star(U \setminus E^{\complement}) < \epsilon$.

Seja $F := U^{\complement}$. Então, $F$ é fechado e $F \subset \left(E^{\complement}\right)^{\complement} = E$. Por outro lado,

$$E \setminus F = \left(E^{\complement}\right)^{\complement} \setminus U^{\complement} = U \setminus E^{\complement},$$

então

$$\mathrm{m}^\star(E \setminus F) = \mathrm{m}^\star(U \setminus E^{\complement}) < \epsilon,$$

mostrando que $E$ é quase fechado por dentro.

$\boxed{\text{(v)} \implies \text{(ii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe $A$ mensurável tal que $\mathrm{m}^\star(A \triangle E) < \epsilon$. Como $A$ é quase aberto, pelo item (ii) $A$ está perto de um aberto: existe $U$ aberto tal que $\mathrm{m}^\star(U \triangle A) < \epsilon$.

Portanto, pela desigualdade triangular na pseudo métrica $(A, B) \mapsto \mathrm{m}^\star(A \triangle B)$, temos que

$$\mathrm{m}^\star(U \triangle E) \le \mathrm{m}^\star(U \triangle A) + \mathrm{m}^\star(A \triangle E) < 2\epsilon,$$

monstrando que $E$ está perto de um aberto. $\square$

**Comentário 1.** Denotamos por

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) := \left\{E \subset \mathbb{R}^d \colon E \text{ é Lebesgue mensurável}\right\}$$

a família de conjuntos mensuráveis à Lebesgue. Provamos que

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(ii) Se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ então $E^{\complement} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(iii) Se $\{E_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, então $\bigcup_{n\ge1} E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Assim, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ é uma *$\sigma$-álgebra.*

Este conceito será abstratizado na segunda parte do curso: diz-se que uma família de subconjuntos de um espaço qualquer é uma $\sigma$-álgebra se contiver o conjunto vazio e se for fechada sob a operação complemento e sob uniões enumeráveis.
Consequentemente, uma $\sigma$-álgebra também é fechada sob interseções enumeráveis.

Ademais, provamos que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ contém todos os conjuntos abertos e fechados.

A restrição da medida exterior de Lebesgue à família $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, ou seja, a função $\mathrm{m} \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$,

$$\mathrm{m}(E) := \mathrm{m}^\star(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n \text{ são caixas}\right\}$$

é chamada de *medida de Lebesgue* no espaço $\mathbb{R}^d$.

Outras notações comuns da medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$ são $\lambda(E)$, $|E|$, $\mathrm{Leb}(E)$ e etc.

O teorema seguinte mostra as propriedades básicas da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, o que no contexto abstrato de uma $\sigma$-álgebra qualquer irão representar a definição de uma medida.

**Teorema 2.** *(os "axiomas"da medida)*

*(1)* $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$

*(2) ($\sigma$-aditividade) Se* $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *são disjuntos, então*

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Antes de começar a prova deste teorema, vamos notar os seguintes fatos.

1. (monotonicidade) Se $E, F$ são mensuráveis e $E \subset F$, então

$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F)\,.$$

Isso é evidente, já que a função m coincide com a medida exterior $\mathrm{m}^\star$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, e a medida exterior é monótona.

2. (aditividade finita para compactos) Se $K, L$ são conjuntos compactos (assim, mensuráveis) e disjuntos, então

$$\mathrm{m}(K \cup L) = \mathrm{m}(K) + \mathrm{m}(L)\,.$$

De novo, esta propriedade (aditividade para dois compactos) vale para a medida exterior $\mathrm{m}^\star$ que é igual a medida m em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.
Ademais, por indução, se $K_1, \ldots, K_N$ são compactos disjuntos, então

$$\mathrm{m}\left(K_1 \cup \ldots \cup K_N\right) = \mathrm{m}(K_1) + \ldots + \mathrm{m}(K_n)\,.$$

*Demonstração do Teorema 2.* Já sabemos que

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mathrm{m}^\star\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(E_n) \quad \text{(pela sub aditividade da medida exterior)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Então, basta mostrar a desigualdade oposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\,. \tag{4}$$

*Caso 1:* Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ são *compactos*. Neste caso, para todo $N \geq 1$, usando a aditividade finita para compactos, e depois a monotonicidade, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}(E_n) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\,.$$

Tomando $N \to \infty$, obtemos (4).

*Caso 2:* Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ são *limitados* (mas não necessariamente compactos). Seja $\epsilon > 0$. Para cada $n \geq 1$, $E_n$ é mensurável, então quase fechado por dentro; portanto, existe $F_n \subset E_n$ fechado (logo limitado, e assim, compacto) tal que

$$\mathrm{m}^\star(E_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Pela sub aditividade da medida exterior, temos

$$\mathrm{m}^\star(E_n) = \mathrm{m}^\star\left(F_n \cup (E_n \setminus F_n)\right) \leq \mathrm{m}^\star(F_n) + \mathrm{m}^\star(E_n \setminus F_n) < \mathrm{m}^\star(F_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Somado sobre todo $n \geq 1$ segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^\star(F_n) + \epsilon \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) + \epsilon = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \epsilon \quad \text{(pelo Caso 1, pois } F_n \text{ são compactos)} \\ &\leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \epsilon \quad \text{(pela monotonicidade da medida).}\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \to 0$ mostramos (4) neste caso.

*Caso 3:* O caso geral. Todo conjunto do espaço euclidiano pode ser escrito como uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados (por quê?).

Então escreva, para todo $n \geq 1$, $E_n = \bigcup_{m \geq 1} E_{n,m}$, onde $\{E_{n,m} \colon m \geq 1\}$ são conjuntos limitados e disjuntos entre si.

Portanto,

$$\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m},$$

que é uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados.

Pelo Caso 2, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \mathrm{m}\left(\bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m}\right) \\ &= \sum_{n,m \geq 1} \mathrm{m}(E_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_{n,m})\right) \quad \text{(pelo teorema de Fubini-Tonelli)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \quad \text{(de novo, pelo Caso 2),}\end{aligned}$$

assim finalizando a prova. □