AULA 10: A MEDIDA DE LEBESGUE

(CONVERGÊNCIA MONÓTONA, REGULARIDADE, CRITÉRIOS DE MEDIDA FINITA)

Começamos com um teorema de convergência monótona para conjuntos, útil em si, e também uma prévia de um resultado muito importante na teoria de integração.

Introduzimos algumas notações acerca do "limite"de uma sequências $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos.

- $E_n \nearrow E$ significa $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$, ou seja, $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não decrescente de conjuntos e $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$.
- $E_n \searrow E$ significa $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$, ou seja, $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não crescente de conjuntos e $E = \bigcap_{n\geq 1} E_n$.

Teorema 1. *(convergência monótona para conjuntos) Seja $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ uma sequência de conjuntos mensuráveis.*

(1) (convergência monótona para cima) Se $E_n \nearrow E$ então $\mathrm{m}(E_n) \to \mathrm{m}(E)$ quando $n \to \infty$.
(2) (convergência monótona para baixo) Se $E_n \searrow E$ e se $\mathrm{m}(E_1) < \infty$, então $\mathrm{m}(E_n) \to \mathrm{m}(E)$ quando $n \to \infty$. A hipótese $\mathrm{m}(E_1) < \infty$ é necessária.

Demonstração. Observe que se $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, logo $\mathrm{m}(F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F \setminus E)$. Portanto, se $\mathrm{m}(E) < \infty$, tem-se $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$.

(1) Se $\mathrm{m}(E_N) = \infty$ para algum $N \geq 1$, então, como a sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é não decrescente, pela monotonicidade da medida, segue que $\mathrm{m}(E_n) = \infty$ para todo $n \geq N$ e também $\mathrm{m}(E) = \infty$, mostrando a afirmação neste caso.

Se $\mathrm{m}(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$, como $E_n \subset E_{n+1}$ temos que

$$\mathrm{m}(E_{n+1} \setminus E_n) = \mathrm{m}(E_{n+1}) - \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Além disso, a união $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ pode ser escrita como uma união disjunta como segue:

$$\bigcup_{n\geq 1} E_n = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup \ldots \sqcup (E_{n+1} \setminus E_n) \sqcup \ldots$$

Portanto, pela σ-aditividade da medida,

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}\left(\cup_{n\geq 1} E_n\right) &= \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2 \setminus E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_{n+1} \setminus E_n) + \ldots \\
&= \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_{n+1}) - \mathrm{m}(E_n) + \ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.
\end{aligned}$$

(2) Considere os intervalos $E_n := [n, \infty) \subset \mathbb{R}$. Então, claramente $E_n \searrow \emptyset$, $\mathrm{m}(E_n) = \infty$, mas $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$, mostrando a necessidade da hipótese $\mathrm{m}(E_N) < \infty$ para algum $N \geq 1$.

Suponha que $\mathrm{m}(E_1) < \infty$ and considere os complementos dos conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ relativamente a E_1, ou seja, considere os conjuntos $F_n := E_1 \setminus E_n$, $n \geq 1$.

Como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não crescente, $\{F_n\}_{n\geq 1}$ é não decrescente e $F_n \nearrow F$, onde

$$F = \bigcup_{n\geq 1} F_n = \bigcup_{n\geq 1} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n\geq 1} E_n = E_1 \setminus E\,.$$

Pelo item (1), $\mathrm{m}(F) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(F_n)$, portanto,

$$\mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E) = \mathrm{m}(F) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(F_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E_n)\right) = \mathrm{m}(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)\,,$$

mostrando que $\mathrm{m}(E) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)$, dado que $\mathrm{m}(E_1) < \infty$. □

A seguir, mostraremos a compatibilidade entre a medida de Lebesgue e a estrutura topológica do espaço $\mathbb{R}^d$.

Teorema 2. *(regularidade interior) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável. Então*
$$\mathrm{m}(E) = \sup\{\mathrm{m}(K) \colon K \subset E,\ K \textit{ conjunto compacto}\}\ .$$

Observação 1. Já provamos a regularidade exterior da medida exterior de Lebesgue. Em particular, nesse contexto de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$, a regularidade exterior afirma que
$$\mathrm{m}(E) = \inf\{\mathrm{m}(U) \colon U \supset E,\ U \text{ conjunto aberto}\}\ .$$

Devido às propriedades de regularidade (interior e exterior), ou seja, à compatibilidade da medida de Lebesgue com a topologia do espaço ambiente, chamamos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ de medida de Radon.

Demonstração do Teorema 2. A desigualdade $\mathrm{m}(E) \geq \sup\{\mathrm{m}(K) \colon K \subset E,\ K \text{compacto}\}$ vale pela monotonicidade da medida. Vamos provar a desigualdade oposta. Seja $\epsilon > 0$. Basta provar que existe $K \subset E$ compacto tal que
$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon\,.$$

Como E é mensurável, pelo Teorema 1, item (iii) da aula 9, E é quase fechado por dentro, ou seja, existe $F \subset E$ fechado tal que
$$\mathrm{m}(E \setminus F) \leq \epsilon\,.$$

Portanto,
$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}\left(F \sqcup (E \setminus F)\right) = \mathrm{m}(F) + \mathrm{m}(E \setminus F) \leq \mathrm{m}(F) + \epsilon\,.$$

Todo conjunto fechado é o limite para cima de uma sequência de conjuntos compactos. De fato, para todo $n \geq 1$, denotando por
$$K_n := F \cap [-n, n]^d\,,$$
temos que os conjuntos K_n são fechados e limitados, logo compactos, e $K_n \nearrow F$.

Pelo item (i) do Teorema 1, $\mathrm{m}(K_n) \to \mathrm{m}(F)$ quando $n \to \infty$, então existe N tal que
$$\mathrm{m}(F) \leq \mathrm{m}(K_N) + \epsilon\,.$$

Concluímos que o conjunto compacto K_N satisfaz $K_N \subset F \subset E$ e
$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F) + \epsilon \leq \mathrm{m}(K_N) + 2\epsilon\,,$$
finalizando a prova do teorema. □

A medida de Lebesgue $\mathrm{m} \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ é invariante por translação, ou seja, para todo conjunto mensurável E e para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos
$$\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E).$$

De fato, a invariância por translação vale para o volume de caixas e a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável é expressa em termos de volumes de caixas que o cobrem.

Acontece que módulo um fator de escala, a medida de Lebesgue é a única medida no espaço euclidiano, invariante por translação.

Teorema 3. *(unicidade da medida de Lebesgue) Seja $\mu \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ uma função tal que*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu\left(\bigsqcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ para toda sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos mensuráveis e disjuntos.

(3) $\mu(E + x) = \mu(E)$ *para todo conjunto mensurável* E *e para todo* $x \in \mathbb{R}^d$.

(4) $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$.

Então, $\mu \equiv m$.

Demonstração. Exercício. □

Um conjunto limitado automaticamente tem medida exterior finita. O contrário não é verdade. Por exemplo, pode ser mostrado (exercício) que o conjunto

$$E := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

é mensurável à Lebesgue, possui medida finita, mas claramente não é limitado.

O teorema seguinte caracteriza conjuntos mensuráveis com medida finita.

Teorema 4. *(critérios para medida finita) Seja* $E \subset \mathbb{R}^d$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E *é Lebesgue mensurável e* $\mathrm{m}(E) < \infty$.

(ii) E *é quase aberto por fora com medida finita:* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $U \supset E$ *aberto tal que* $\mathrm{m}(U) < \infty$ *e* $\mathrm{m}^\star(U \setminus E) < \epsilon$.

(iii) E *está perto de um aberto limitado:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto aberto e limitado* U *tal que* $\mathrm{m}^\star(U \bigtriangleup E) < \epsilon$.

(iv) E *é quase compacto por dentro:* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $K \subset E$ *compacto tal que* $\mathrm{m}^\star(E \setminus K) < \epsilon$.

(v) E *está perto de um compacto:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um compacto* K *tal que* $\mathrm{m}^\star(K \bigtriangleup E) < \epsilon$.

(vi) E *está perto de um conjunto mensurável e limitado:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável e limitado* A *tal que* $\mathrm{m}^\star(A \bigtriangleup E) < \epsilon$.

(vii) E *está perto de um conjunto mensurável com medida finita:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável* A *tal que* $\mathrm{m}(A) < \infty$ *e* $\mathrm{m}^\star(A \bigtriangleup E) < \epsilon$.

(viii) E *está perto de um conjunto elementar:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto elementar* B *tal que* $\mathrm{m}^\star(B \bigtriangleup E) < \epsilon$.

(ix) E parece pixelizado *(em escala suficientemente fina):* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *e existe* D, *uma união finita de caixas diádicas de geração* m *(ou seja, de comprimento lateral ou escala* $\frac{1}{2^m}$*), tal que* $\mathrm{m}^\star(D \bigtriangleup E) < \epsilon$.

Demonstração. $\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de mensurabilidade, E é quase aberto, logo existe $U \supset E$ aberto tal que $\mathrm{m}^\star(U \setminus E) \le \epsilon$. Segue que U deve ter medida finita:

$$\mathrm{m}(U) = \mathrm{m}\left(E \sqcup (U \setminus E)\right) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(U \setminus E) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}^\star(U \setminus E) \le \mathrm{m}(E) + \epsilon < \infty\,.$$

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(i)}}$ Esta implicação é óbvia: E é quase aberto, logo, mensurável, e pela monotonicidade da medida, se $E \subset U$, onde U é aberto com medida finita, então $\mathrm{m}(E) \le \mathrm{m}(U) < \infty$.

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(i)}}$ Já sabemos (veja Teorema 1 (ii) da aula 8) que todo conjunto E que está (arbitrariamente) perto de abertos, necessariamente é mensurável.

Resta provar que E possui medida finita. Sejam $\epsilon > 0$ e U aberto e limitado tais que $\mathrm{m}(U \triangle E) < \epsilon$. Como

$$E \subset (E \setminus U) \cup U \subset (E \triangle U) \cup U\,,$$

temos que

$$\mathrm{m}(E) \le \mathrm{m}(E \triangle U) + \mathrm{m}(U) \le \epsilon + \mathrm{m}(U) < \infty.$$

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(viii)}}$ Sejam $\epsilon > 0$ e U aberto tais que

$$U \supset E, \quad \mathrm{m}(U) < \infty, \quad \mathrm{m}^\star(U \setminus E) < \epsilon.$$

Pelo Lema 3 da aula 8, o conjunto aberto U pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas e fechadas $\{B_n\}_{n \ge 1}$. Pelo Lema 2 da aula 8,

$$\mathrm{m}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\,.$$

Mas como $\mathrm{m}(U) < \infty$, a série infinita acima é convergente, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que sua cauda satisfaz

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Seja

$$B := \bigcup_{n=1}^{N} B_n\,.$$

Então, B é um conjunto elementar (uma união finita de caixas), $B \subset U$ e

$$U \triangle B = U \setminus B \subset \bigcup_{n \ge N+1} B_n\,.$$

Segue que

$$\mathrm{m}^\star(U \triangle B) \le \mathrm{m}^\star\left(\bigcup_{n \ge N+1} B_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Por outro lado,

$$\mathrm{m}^\star(U \triangle E) = \mathrm{m}^\star(U \setminus E) < \epsilon,$$

portanto,

$$\mathrm{m}^\star(B \triangle E) \le \mathrm{m}^\star(B \triangle U) + \mathrm{m}^\star(U \triangle E) < 2\epsilon,$$

monstrando a afirmação.

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(iii)}}$ Pagando mais um ϵ, podemos supor que o conjunto elementar (logo, limitado) B do argumento anterior é aberto. Mais precisamente, ampliando ligeiramente cada caixa fechada que compõe B, obtemos um conjunto aberto $B' \supset B$ tal que $\mathrm{m}(B' \setminus B) < \epsilon$, logo B' está ϵ-perto de B, que já está ϵ-perto de E, provando assim a afirmação.

$\boxed{\text{(viii)} \implies \text{(iii)}}$ Esta afirmação é óbvia, já que todo conjunto elementar é limitado, e, pagando mais um ϵ se for necessário, pode ser suposto aberto.

Assim acabamos de provar as equivalências (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (viii). As equivalências (ii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v) $\iff$ (vi) $\iff$ (vii) são similares e são deixadas como exercícios.

Claramente, a priori (ix) é mais forte do que (viii): parecer pixelizado significa estar (arbitrariamente) perto de uma união finita de caixas diádicas de mesma geração, que obviamente é um conjunto elementar. Então, resta provar a implicação (viii) $\implies$ (ix), que é a afirmação mais interessante do teorema.

$\boxed{\text{(viii)} \implies \text{(ix)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe um conjunto elementar $B = B_1 \cup \ldots \cup B_N$ tal que $\mathrm{m}^\star(B \triangle E) < \epsilon$, onde $B_1, \ldots, B_N$ são caixas, que podem ser escolhidas fechadas.

A ideia é pixelizar cada caixa B_n, $1 \leq n \leq n$.

Então, seja B_0 uma caixa fechada qualquer. Vamos provar que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que B_0 parece pixelizada na escala $\frac{1}{2^{m_0}}$. Para cada $m \geq 0$, considere a união de todas caixas diádicas $Q_{i,m}$ de geração m que intersectam B_0:

$$D_m := \bigcup \left\{Q_{i,m} \colon Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset,\ i \in \mathbb{Z}\right\} .$$

Como, para cada geração m, temos $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} Q_{i,m} = \mathbb{R}^d$, segue que $B_0 \subset D_m$, portanto,

$$B_0 \subset \bigcap_{m\geq 0} D_m .$$

Além disso, pela propriedade de encaixamento das caixas diádicas (toda caixa de geração $m+1$ está contida em uma caixa de geração m), temos que $D_{m+1} \subset D_m$, ou seja, a sequência $\{D_m\}_{m\geq 0}$ é não decrescente.

Vamos mostrar que módulo um conjunto negligenciável, $\bigcap_{m\geq 0} D_m$ é, na verdade, igual a B_0.

Seja

$$x \in \Big(\bigcap_{m\geq 0} D_m\Big) \setminus B_0 .$$

Como B_0 é fechado e $x \notin B_0$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $V \cap B_0 = \emptyset$. Para m suficientemente pequeno, existe uma caixa diádica $Q_{j,m}$ de geração m tal que $x \in Q_{j,m} \subset V$. Portanto,

$$x \in Q_{j,m} \quad \text{e} \quad Q_{j,m} \cap B_0 = \emptyset .$$

Por outro lado, $x \in D_m = \bigcup \left\{Q_{i,m} \colon Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset,\ i \in \mathbb{Z}\right\}$, portanto existe uma caixa diádica $Q_{i,m}$ de geração m tal que

$$x \in Q_{i,m} \quad \text{e} \quad Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset .$$

Segue que $x \in Q_{j,m} \cap Q_{i,m}$ e $i \neq j$ (essas duas caixas são diferentes). Mas duas caixas diádicas de mesma geração são iguais ou quase disjuntas. Portanto, x pertence à *fronteira* de uma caixa diádica, que é um conjunto *negligenciável* (porque a fronteira de uma caixa consiste em seus lados, que são caixas de dimensão menor do que a do espaço ambiente). A família de caixas diádicas é enumerável. Portanto, $\Big(\bigcap_{m\geq 0} D_m\Big) \setminus B_0$ está contido em um conjunto negligenciável (uma união enumerável de conjuntos negligenciáveis), logo, é negligenciável também.

Concluímos que, para algum conjunto $\mathcal{Z}$ de medida zero, temos

$$\bigcap_{m\geq 0} D_m = B_0 \cup \mathcal{Z},$$

portanto,

$$D_m \searrow B_0 \cup \mathcal{Z}.$$

Pelo item (i) do Teorema 1, segue que

$$\mathrm{m}(B_0) = \mathrm{m}(B_0 \cup \mathcal{Z}) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{m}(D_m),$$

portanto existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq m_0$,

$$\mathrm{m}(D_m) < \mathrm{m}(B_0) + \frac{\epsilon}{N}\,,$$

logo,

$$\mathrm{m}(D_m \setminus B_0) = \mathrm{m}(D_m) - \mathrm{m}(B_0) < \frac{\epsilon}{N}\,.$$

Vamos aplicar a conclusão acima a cada caixa B_n, $1 \leq n \leq N$. Existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que B_n parece pixelizada na escala $\frac{1}{2^m}$ para todo $m \geq m_n$; mais precisamente, existe D_m^n, uma união finita de caixas diádicas de geração m, tal que

$$\mathrm{m}(D_m^n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{N}\,.$$

Seja $\underline{m} := \max\{m_n \colon 1 \leq n \leq N\}$. Então, na escala $\frac{1}{2^{\underline{m}}}$ todas as caixas B_n, $1 \leq n \leq N$ parecem pixelizadas, no sentido que

$$\mathrm{m}(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{N}\,.$$

Seja

$$D := \bigcup_{n=1}^N D_{\underline{m}}^n\,.$$

Então, D é uma união finita de caixas diádicas de mesma geração $\underline{m}$ e $D \supset B = \bigcup_{n=1}^N B_n$. Além disso,

$$D \setminus B = \Big(\bigcup_{n=1}^N D_{\underline{m}}^n\Big) \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^N B_n\Big) \subset \bigcup_{n=1}^N \big(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n\big)\,,$$

portanto,

$$\mathrm{m}(D \triangle B) = \mathrm{m}(D \setminus B) \leq \sum_{n=1}^N \mathrm{m}\big(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n\big) < N\,\frac{\epsilon}{N} = \epsilon\,.$$

Provamos que B parece pixelizado, ou seja, está ϵ-perto de D, que está ϵ-perto de E, finalizando a prova do teorema. $\square$