AULA 12: INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES SIMPLES

Começamos com a definição e as propriedades básicas de funções simples.

Definição 1. Uma função $s\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é dita *simples* se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} \,,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ e E_i são conjuntos mensuráveis à Lebesgue para todo $i \in [k]$.

Ademais, $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ é uma função simples *sem sinal* se os coeficientes $c_i \in [0, +\infty]$ para todo $i \in [k]$.

Notação. Vamos fazer as seguintes *convenções* naturais sobre operações algébricas que envolvem $+\infty$.

$$\begin{aligned}
&\infty + \infty = \infty \\
&c \cdot \infty = \infty, \text{ se } c > 0 \\
&0 \cdot \infty = 0 \\
&\infty \cdot c = \infty, \text{ se } c > 0 \\
&\infty \cdot 0 = 0 \,.
\end{aligned}$$

Observação 1. Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples. Os conjuntos mensuráveis $E_1, \dots, E_k$ não precisam ser disjuntos. Porém, se for conveniente, pode-se supor que eles são disjuntos e até mesmo, que eles formam uma *partição* do espaço $\mathbb{R}^d$.

De fato, se (por simplicidade) $k = 2$, logo $s = c_1 \mathbf{1}_{E_1} + c_2 \mathbf{1}_{E_2}$, como os dois conjuntos E_1 e E_2 determinam uma partição de espaço $\mathbb{R}^d$ em quatro subconjuntos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^d &= (E_1 \setminus E_2) \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1 \cup E_2)^{\complement} \\
&= (E_1 \cap E_2^{\complement}) \sqcup (E_2 \cap E_1^{\complement}) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement}) \,,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
s(x) = c_1 \mathbf{1}_{E_1}(x) + c_2 \mathbf{1}_{E_2}(x) &= \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2^{\complement} \\ c_2 & \text{se } x \in E_2 \cap E_2^{\complement} \\ c_1 + c_2 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2 \\ 0 & \text{se } x \in E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement} \end{cases} \\
&= c_1 \, \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2^{\complement}} + c_2 \, \mathbf{1}_{E_2 \cap E_1^{\complement}} + (c_1 + c_2) \, \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} + 0 \, \mathbf{1}_{E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement}} \,.
\end{aligned}$$

O mesmo argumento vale com qualquer número k de conjuntos E_i, $i \in [k]$.

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, vamos denotar por $E^+ := E$ e por $E^- := E^{\complement}$. Então, com estas notações, os conjuntos $E_1, \dots, E_k$ determinam uma partição

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+,-\}} E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}$$

em 2^k conjuntos mensuráveis, e, claramente,

$$s = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+,-\}} c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \, \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}}$$

para alguns coeficientes $c'_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$.

Note que se $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, então, claramente $c'_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} = c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k} \in [0, \infty]$.

Proposição 1. *(propriedades básicas de funções simples) Sejam s e σ duas funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Então,*

(1) $s + \sigma$ e cs são funções simples.
(2) $s \cdot \sigma$ é uma função simples.
(3) $s^+, s^-, |s|$ são funções simples.

Demonstração. O primeiro item é óbvio. O segundo segue do fato de que $\mathbf{1}_E \, \mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{E \cap F}$. Para provar o terceiro, seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos mensuráveis E_i, $i \in [k]$ são *disjuntos*. Então, evidentemente,

$$s^{\pm} = \sum_{i=1}^k c_i^{\pm} \, \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad |s| = \sum_{i=1}^k |c_i| \; \mathbf{1}_{E_i} \,,$$

que são funções simples. □

Definição 2. (da integral de Lebesgue de uma função simples)

Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples *sem sinal*, então $c_i \in [0, \infty]$ para todo $i \in [k]$. Definimos a integral de s por

$$\int_{R^d} s \, d\mathrm{m} := \sum_{i=1}^k c_i \, \mathrm{m}(E_i) \,,$$

com as convenções acima mencionadas para operações com ∞.

Ademais, uma função simples qualquer é dita *absolutamente integrável* se

$$\int_{R^d} |s| \; d\mathrm{m} < \infty \,.$$

Neste caso, definimos a integral de s por

$$\int_{R^d} s \, d\mathrm{m} := \int_{R^d} s^+ \, d\mathrm{m} - \int_{R^d} s^- \, d\mathrm{m} \,.$$

Observação 2. A integral de uma função simples sem sinal (e então também a de uma função absolutamente integrável) é bem definida. De fato, dadas duas representações da função simples sem sinal s,

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j} \,,$$

onde $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in [0, \infty]$, temos que

$$\sum_{i=1}^k c_i \, \mathrm{m}(E_i) = \sum_{j=1}^l d_j \, \mathrm{m}(F_j) \,.$$

Provamos isso em duas etapas. Em primeiro lugar, supomos que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ sejam disjuntos dois a dois. Portanto, $\{E_i \cap F_j\}_{(i,j) \in [k] \times [l]}$ também são disjuntos. Pela Observação 1, sem perda da generalidade, podemos supor que

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{j=1}^l F_j = \mathbb{R}^d \,.$$

Portanto, para todo $i \in [k]$ e $j \in [l]$,

$$E_i = \bigsqcup_{j=1}^{l} (E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad F_j = \bigsqcup_{i=1}^{k} (E_i \cap F_j)\,,$$

logo

$$\mathrm{m}(E_i) = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad \mathrm{m}(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i \cap F_j)\,.$$

Note que se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ e se x pertence a esta interseção, então $c_i = s(x) = d_j$. Por outro lado, se $E_i \cap F_j = \emptyset$, então $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = 0$. Logo, para todo $(i,j) \in [k] \times [l]$, tem-se

$$c_i \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathrm{m}(E_i) &= \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{l} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{l} d_j \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{l} d_j \, \mathrm{m}(F_j)\,.\end{aligned}$$

Se $\{E_i\}_{i \in [k]}$ não são disjuntos, podemos substituí-los por conjuntos disjuntos. De fato, pela Observação 1,

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} \\ &= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{+,-\}} \left(c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k}\right) \, \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}}\,. \end{aligned}$$

Ademais, como $c_i^- = 0$ para todo $i \in [k]$, pois $c_i \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{+,-\}} \left(c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k}\right) \, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) = \\ &\quad = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{+,-\}} c_1^{\alpha_1} \, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \ldots + \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{+,-\}} c_k^{\alpha_k} \, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) \\ &\quad = \sum_{\alpha_1 = +,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \{+,-\}} c_1 \, \mathrm{m}\left(E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \ldots \\ &\quad + \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \{+,-\},\, \alpha_k = +} c_k \, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k\right) \\ &\quad = c_1 \, \mathrm{m}\Big(\bigcup_{\alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \{+,-\}} E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k} \Big) + \ldots \\ &\quad + c_k \, \mathrm{m}\Big(\bigcup_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \{+,-\}} E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k \Big) \\ &\quad = c_1 \mathrm{m}(E_1) + \ldots + c_k \mathrm{m}(E_k)\,, \end{aligned}$$

assim estabelecendo que a integral de uma função simples sem sinal está bem definida.

Dizemos que uma propriedade $P(x)$ vale para quase todo ponto (abreviado q.t.p.) $x \in \mathbb{R}^d$ se

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon P(x) \text{ não vale}\right\} = 0\,.$$

Por exemplo, dada uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, a afirmação $f = 0$ q.t.p. significa $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$, ou seja,

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\right\} = 0\,.$$

Além disso, para duas funções f e g, a afirmação $f = g$ q.t.p. significa

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq g(x)\right\} = 0\,.$$

Filosofia de Lebesgue: Conjuntos de medida zero não importam em teoria da medida, ou seja, uma afirmação válida em q.t.p. é suficientemente boa.

Definição 3. O suporte (no sentido de teoria da medida) de uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é o conjunto:

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\}\,.$$

O seguinte resultado resume as propriedades básicas da integral de uma função simples sem sinal.

Proposição 2. *Sejam $s, \sigma\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ duas funções simples sem sinal, e seja $c \in [0,\infty]$. Então,*

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s+\sigma)\, d\mathrm{m} = \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} (cs)\, d\mathrm{m} = c \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m}\,.$$

(ii) (finitude)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} < \infty \quad \textit{se e somente se} \quad s < \infty \textit{ q.t.p. e } \mathrm{m}\left(\operatorname{supp}(f)\right) < \infty\,.$$

(iii) (nulidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} = 0 \quad \textit{se e somente se} \quad s = 0 \textit{ q.t.p.}$$

(iv) (monotonicidade) Se $s \le \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s \le \int \sigma$.

(v) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s = \int \sigma$.

Demonstração. A linearidade é óbvia por definição.

$\boxed{\text{ii}}$ Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples sem sinal. Podemos supor que $c_i \in (0,\infty]$ para todo $i \in [k]$ e que os conjuntos $\{E_i\}_{i\in[k]}$ são disjuntos. Então,

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i\,.$$

Vamos começar com a implicação oposta.

Como $\mathrm{m}\left(\operatorname{supp}(f)\right) < \infty$, temos que $\mathrm{m}(E_i) < \infty$ para todo $i \in [k]$.

Como $s < \infty$ q.t.p., se para algum $j \in [k]$, $c_j = \infty$, então $\mathrm{m}(E_j) = 0$, logo $c_j \mathrm{m}(E_j) = 0$.

Para todos os outros índices i, temos $c_i\,\mathrm{m}(E_i) < \infty$. Portanto, $\displaystyle\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathrm{m}(E_i) < \infty$.

Provamos a implicação direta. Como $\displaystyle\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathrm{m}(E_i) < \infty$, e como $c_i > 0$ para todo $i \in [k]$, necessariamente $\mathrm{m}(E_i) < \infty$, logo

$$\mathrm{m}\left(\mathrm{supp}(f)\right) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i) < \infty\,.$$

Além disso, se para algum índice j temos $c_j = \infty$, como $c_j\,\mathrm{m}(E_j) \le \displaystyle\int s < \infty$, então necessariamente $\mathrm{m}(E_j) = 0$. Portanto,

$$\{x\colon s(x) = \infty\} = \{x\colon \text{ existe } \; j \in [k]\,,\; x \in E_j \;\text{ e }\; c_j = \infty\} = \bigcup_{j\colon c_j = \infty} E_j\,,$$

logo

$$\mathrm{m}\left(\{x\colon s(x) = \infty\}\right) = 0\,.$$

$\boxed{\text{iii}}$ Como no item anterior, escrevemos $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, com $c_i > 0$ e E_i disjuntos, logo

$$\mathrm{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^{k} E_i\,.$$

Se $s = 0$ q.t.p., então $\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = 0$, logo $\mathrm{m}(E_i) = 0$ para todo $i \in [k]$, e daí,

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathrm{m}(E_i) = 0\,.$$

Por outro lado, se

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathrm{m}(E_i) = 0\,,$$

para todo $i \in [k]$ temos que $c_i\,\mathrm{m}(E_i) = 0$, e como $c_i > 0$, tem-se $\mathrm{m}(E_i) = 0$, mostrando que

$$\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i) = 0\,,$$

isto é, $s = 0$ q.t.p.

$\boxed{\text{iv}}$ Suponha que $s \leq \sigma$ q.t.p.. Pela Observação 1, podemos representar essas funções como

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathbf{1}_{F_j} \,,$$

onde $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ são *partições* do espaço $\mathbb{R}^d$. Portanto, semelhante argumento ao da Observação 2, implica

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathrm{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)$$

$$\int \sigma = \sum_{j=1}^{l} d_j \, \mathrm{m}(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \,.$$

Dados $i \in [k]$ e $j \in [l]$, ou $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = 0$, e neste caso $c_i \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)$, ou $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) > 0$, e neste caso, como $s \leq \sigma$ q.t.p., necessariamente temos $c_i \leq d_j$, logo $c_i \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \leq d_j \, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)$. Segue que $\displaystyle\int s \leq \int \sigma$.

Finalmente, item (v) é uma consequência imediata da monotonicidade da integral. □

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de funções simples *com* sinal.

Proposição 3. *Dadas $s, \sigma \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções simples absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$, tem-se*

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) \, d\mathrm{m} = \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathrm{m} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, d\mathrm{m} \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^d} (cs) \, d\mathrm{m} = c \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathrm{m} \,.$$

(ii) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s \leq \int \sigma$.

(iii) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s = \int \sigma$.

Demonstração. Exercício. □