

## AULA 14: A INTEGRAL DE LEBESGUE DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS SEM SINAL

Como vimos, toda função mensurável sem sinal pode ser aproximada por baixo por funções simples, para as quais já definimos o conceito de integração à Lebesgue. Podemos então definir a integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal por meio dessa aproximação.

**Definição 1.** Seja  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  uma função mensurável. Definimos sua integral à Lebesgue por

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm : s \leq f \text{ q.t.p., } s \text{ é simples e sem sinal} \right\}.$$

**Observação 1.** Obviamente, dada uma função mensurável sem sinal  $f$ , tem-se

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \, dm \leq \infty.$$

Além disso, integração à Lebesgue é uma operação monótona:

$$\text{se } f \leq g \text{ q.t.p., então } \int_{\mathbb{R}^d} f \, dm \leq \int_{\mathbb{R}^d} g \, dm,$$

já que, se  $s$  for uma função simples sem sinal tal que  $s \leq f$  q.t.p., então também  $s \leq g$  q.t.p..

**Observação 2.** Na definição da integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal  $f$ , podemos nos restringir a tipos mais específicos de funções simples, a saber, aquelas que *moram numa caixa*, e que aproximam  $f$  por baixo em *todo* ponto:

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^d} f \, dm = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm : s \leq f, s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\}.$$

Obviamente,  $\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm$  é maior do que ou igual ao lado direito da igualdade abaixo. Vamos provar a desigualdade oposta, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dm \leq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, dm : s \leq f, s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\}.$$

Fixe uma função simples sem sinal  $s$  tal que  $s \leq f$  q.t.p. e seja

$$\mathcal{Z} := \{x: s(x) > f(x)\},$$

então  $m(\mathcal{Z}) = 0$ .

Escreva  $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ , onde  $\{E_i\}_{i \in [k]}$  são conjuntos mensuráveis disjuntos.

Para todo  $i \in [k]$  e  $n \geq 1$  definimos os truncamentos

$$c_{i,n} := \min\{c_i, n\} \quad \text{e} \quad E_{i,n} := E_i \cap [-n, n]^d \setminus \mathcal{Z},$$

e a função simples

$$s_n := \sum_{i=1}^k c_{i,n} \mathbf{1}_{E_{i,n}}.$$

Claramente,  $s_n \geq 0$ ,  $s_n \leq f$  em todo ponto e  $s_n$  mora na caixa  $[-n, n]^d \times [0, n]$ .

Além disso, para cada  $i \in [k]$  tem-se

$$c_{i,n} \rightarrow c_i \quad \text{e} \quad E_{i,n} \nearrow E_i \setminus \mathcal{Z} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos,

$$m(E_{i,n}) \rightarrow m(E_i \setminus \mathcal{Z}) = m(E_i).$$

Portanto, quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$\int s_n = \sum_{i=1}^k c_{i,n} m(E_{i,n}) \rightarrow \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = \int s.$$

Para finalizar o argumento, consideramos separadamente os casos  $\int f < \infty$  ou  $\int f = \infty$ . Se  $\int f < \infty$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $s$  simples, sem sinal, tal que  $s \leq f$  q.t.p. e

$$\int f \leq \int s + \epsilon.$$

Considerando a sequência  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  correspondente a  $s$  definida acima, como temos

$$\int s_n \rightarrow \int s \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int s \leq \int s_N + \epsilon.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \int f &\leq \int s_N + 2\epsilon \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, dm : \sigma \leq f, \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\} + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , provamos a afirmação nesse caso.

Se  $\int f = \infty$ , então, para todo  $M < \infty$ , existe  $s$  simples, sem sinal,  $s \leq f$  q.t.p. tal que

$$\int s > M.$$

De novo, considerando a sequência  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  correspondente a  $s$  definida acima,  $\int s_n \rightarrow \int s$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\int s_N > M.$$

Portanto,

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, dm : \sigma \leq f, \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\} \geq \int s_N > M \rightarrow \infty,$$

terminando a prova.

O próximo teorema, o primeiro resultado sobre a troca do limite com a integral de Lebesgue, é um dos mais importantes na teoria da medida, e exemplifica a vantagem da integração de Lebesgue sobre a de Riemann-Darboux. A sua demonstração também ilustra um raciocínio comum na teoria de probabilidades bem como na teoria da medida, a saber, *um argumento de tempos de parada*.

**Teorema 1.** (de convergência monótona) *Seja  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência não decrescente de funções mensuráveis à Lebesgue. Então,  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \geq 1} f_n$  é mensurável e*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

*Demonstração.* Pela Proposição 1 da aula 13, a função limite  $f$  é, de fato, mensurável à Lebesgue. Além disso, pela monotonicidade da integral, já que, para todo  $n \geq 1$ ,  $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ , segue que

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f,$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \sup_{n \geq 1} \int f_n \leq \int f.$$

Para provar a desigualdade oposta,

$$\int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

usando (1), basta considerar uma função simples sem sinal  $s \leq f$ , que mora numa caixa, e mostrar que

$$\int s \leq \sup_{n \geq 1} \int f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Podemos representar

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

onde, para todo  $i \in [k]$ ,  $c_i \in (0, \infty)$  (os coeficientes  $c_i$  são finitos, pois  $s$  mora numa caixa, então é limitada) e os conjuntos  $E_i$  são mensuráveis e disjuntos.

Fixe  $\epsilon > 0$ . Dados  $i \in [k]$  e  $x \in E_i$  então  $s(x) = c_i$  e

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x) = f(x) \geq s(x) = c_i > (1 - \epsilon)c_i.$$

Portanto, existe um *tempo limiar*  $n_x \in \mathbb{N}$ , tal que

$$f_n(x) > (1 - \epsilon)c_i \quad \text{para todo } n \geq n_x.$$

O problema é a falta da *uniformidade*: a taxa de convergência da sequência  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  para  $f(x)$  depende de  $x$ , e a priori poderia variar muito, dependendo de  $x$ . Por isso, o limiar correspondente  $n_x$  também poderia variar muito. A ideia é usar um argumento de tempos de parada, onde impomos alguma uniformidade. Mais precisamente, dado um tempo  $n \in \mathbb{N}$ , seja

$$E_{i,n} := \{x \in E_i : f_n(x) > (1 - \epsilon)c_i\}$$

o conjunto de elementos de  $E_i$  tendo o comportamento desejado no mesmo tempo dado  $n$ .

Como, para todo  $x \in E_i$  temos  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ , segue que  $E_{i,n} \subset E_{i,n+1}$ . Além disso, já que, eventualmente, todo ponto  $x \in E_i$  possui um tempo limiar  $n_x$  após o qual o comportamento desejado  $f_n(x) > (1 - \epsilon)c_i$  acontece, concluímos que

$$\bigcup_{n \geq 1} E_{i,n} = E_i, \quad \text{logo } E_{i,n} \nearrow E_i \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, pelo teorema de convergência monótona *para conjuntos* (que já foi estabelecido),

$$(2) \quad m(E_{i,n}) \rightarrow m(E_i) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Claramente, dado um tempo  $n \geq 1$ , como  $f_n \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $i \in [k]$  tem-se

$$f_n(x) \geq (1 - \epsilon)c_i \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x).$$

Como os conjuntos  $E_{i,n} \subset E_i$ , onde  $i \in [k]$ , são disjuntos, somando sobre  $i \in [k]$  obtemos

$$f_n(x) \geq \sum_{i=1}^k (1 - \epsilon)c_i \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) = (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}(x).$$

Integrando em  $x$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \, dm(x) &\geq (1 - \epsilon) \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) \right) dm(x) \\ &= (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^k c_i m(E_{i,n}). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  e usando (2), concluímos que

$$\int f \, dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dm \geq (1 - \epsilon) \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = (1 - \epsilon) \int s \, dm.$$

Finalmente, passando  $\epsilon \rightarrow 0$ , segue que

$$\int f \, dm \geq \int s \, dm,$$

finalizando a prova. □

**Observação 3.** No teorema anterior, a hipótese que  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  é uma sequência não decrescente (em todo ponto) pode ser enfraquecida para *quase* todo ponto, já que, trocando o valor de cada função para zero nos pontos onde a sequência não possui esse comportamento (então, em um conjunto negligenciável), não muda o valor da integral, então não afeta a conclusão.

**Observação 4.** Seja  $\{E_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de conjuntos mensuráveis e suponha que

$$E_n \nearrow E \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Claramente as funções indicadoras correspondentes  $\{\mathbf{1}_{E_n}\}_{n \geq 1}$  formam uma sequência não decrescente de funções mensuráveis, e  $\mathbf{1}_{E_n} \rightarrow \mathbf{1}_E$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Teorema 1 então implica

$$m(E_n) = \int \mathbf{1}_{E_n} \rightarrow \int \mathbf{1}_E = m(E).$$

Portanto, o teorema de convergência monótona para funções (Teorema 1) é uma extensão do teorema de convergência monótona para conjuntos (Teorema 1 da aula 9). Contudo, como vimos, o resultado mais fraco (para conjuntos) foi usado, de uma maneira essencial na prova do resultado mais forte (sobre funções).

O corolário a seguir nos permitirá no futuro, ao estabelecer certas propriedades (que são fechadas sob limites) de funções mensuráveis, reduzir à situação mais conveniente de uma função limitada ou de uma função com suporte limitado ou mesmo de uma função localizada em uma caixa.

**Corolário 1.** Seja  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  uma função mensurável.

- (1) (Truncamento vertical) Para todo  $n \geq 1$ , considere o truncamento vertical da função  $f$  até o nível  $n$ , ou seja:

$$f_n := \min\{f, n\}.$$

Então,  $f_n$  é mensurável, limitada (por  $n$ ) e  $f_n \nearrow f$  quando  $n \rightarrow \infty$ , logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

- (2) (Truncamento horizontal) Para todo  $n \geq 1$ , considere o truncamento horizontal da função  $f$  no domínio  $\{|x| \leq n\}$ , ou seja:

$$f_n := f \mathbf{1}_{\{|x| \leq n\}}.$$

Então,  $f_n$  é mensurável, possui suporte limitado (contido na caixa  $[-n, n]^d$ ) e  $f_n \nearrow f$  quando  $n \rightarrow \infty$ , logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$

- (3) (Localização numa caixa) Sejam  $x_n \nearrow \infty$  e  $y_n \nearrow \infty$  duas sequências de números (por exemplo,  $x_n = y_n = n$  para todo  $n \geq 1$ ). Considere a localização da função  $f$  dentro da caixa  $B_n := [-x_n, x_n]^d \times [0, y_n]$ , ou seja:

$$f_n := \min\{f, y_n\} \mathbf{1}_{\{|x| \leq x_n\}}.$$

Então,  $f_n$  é mensurável,  $f_n$  mora na caixa  $B_n$  e  $f_n \nearrow f$  quando  $n \rightarrow \infty$ , logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \rightarrow \int f.$$