AULA 16: FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE INTEGRÁVEIS

Começamos com o conceito de função mensurável à Lebesgue com sinal.

Definição 1. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ é chamada mensurável à Lebesgue se existir uma sequência de funções simples $\{s_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em q.t.p.

Observação 1. Lembre-se que dado $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ \coloneqq \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- \coloneqq \max\{-c, 0\}$$

Então,

$$c^+, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-$$

e

$$c = 0 \Leftrightarrow c^+ = c^- = 0$$

Além disso, dada uma sequência de números $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$x_n \to x \quad \text{se e somente se} \quad x_n^+ \to x^+ \quad \text{e} \quad x_n^- \to x^-$$

Ademais, se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções, então

$$f_n \to f \quad \text{em q.t.p. se e somente se} \quad f_n^+ \to f^+ \quad \text{em q.t.p e} \quad f_n^- \to f^- \quad \text{em q.t.p}$$

O seguinte teorema fornece uma caracterização do conceito de mensurabilidade para funções com sinal, análogo ao Teorema 1 da aula 13.

Teorema 1. *Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência de funções simples com sinal $\{s_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em q.t.p.

(2) f^+ e f^- são mensuráveis à Lebesgue.

(3) Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in I\}$ é mensurável à Lebesgue.

(4) Para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in U\}$ é mensurável à Lebesgue.

(5) Para todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in F\}$ é mensurável à Lebesgue.

(6) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{f > \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

As outras afirmações do tipo $\{f \geq \lambda\}, \{f < \lambda\}$ ou $\{f \leq \lambda\}$ mensuráveis também são equivalentes às afirmações acima.

Demonstração do Teorema 1. A prova da equivalência entre as afirmações de (3) até (6) é completamente análoga à do Teorema 1 da aula 13.

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções simples (com sinais) tal que $s_n \to f$ em q.t.p. Pela observação anterior, $s_n^+ \to f^+$ e $s_n^- \to f^-$ em q.t.p. Como s_n^+, s_n^- são funções simples (sem sinais), segue que f^+ e f^- são mensuráveis

(2) $\Rightarrow$ (1) Existem duas sequências de funções simples sem sinais, $s_n \to f_n^+$ e $\sigma_n \to f^-$. Podemos supor que para todo $n \geq 1$, s_n e σ_n moram em caixas, então são finitas em todo ponto. Portanto, a função $s_n - \sigma_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- = f,$$

provando que f é mensurável.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Vamos considerar separadamente os casos $0 \notin I$ e $0 \in I$.

- Se $0 \notin I$, como I é conexo, ou $I \subset (0, \infty)$ ou $I \subset (-\infty, 0)$. Não é difícil ver que se $I \subset (0, \infty)$ então
$$\{f \in I\} = \{f^+ \in I\}$$
que é mensurável, pois f^+ é mensurável. Similarmente, se $I \subset (-\infty, 0)$, que equivale a $-I \subset (0, \infty)$, temos
$$\{f \in I\} = \{f^- \in -I\}$$
que também é mensurável, pois f^- é mensurável e $-I$ é um intervalo.
- Se $0 \in I$, então
$$I = I^+ \cup I^- \cup \{0\}$$
onde
$$I^+ := I \cap (0, \infty) \quad \text{e} \quad I^- := I \cap (-\infty, 0)\,.$$
Portanto,
$$\{f \in I\} = \{f \in I^+\} \cup \{f \in I^-\} \cup \{f = 0\}\,.$$
Pelo caso anterior, $\{f \in I^+\}$ e $\{f \in I^-\}$ são mensuráveis, enquanto
$$\{f = 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}$$
que também é mensurável. Portanto, em todos os caso, $\{f \in I\}$ é, de fato, mensurável.

(6) $\Rightarrow$ (2) Seja $\lambda \geq 0$. Temos que
$$\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},$$
pois $f^+(x) = f(x)$ sempre que $f(x) > 0$ e $f^+(x) = 0$ no caso contrário. Como $\{f > \lambda\}$ é mensurável e $\lambda \geq 0$ é arbitrário, segue que f^+ é mensurável. Similarmente, dado $\lambda \geq 0$,
$$\{f^- > \lambda\} = \{f < -\lambda\},$$
que é um conjunto mensurável, logo f^-é uma função mensurável. □

A seguir, apresentamos exemplos básicos de funções mensuráveis.

Teorema 2. *As seguintes valem:*

(1) Toda função contínua $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável.

(2) Se $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\phi \circ f$ é mensurável.

(3) Toda função simples é mensurável.

(4) Se $f = g$ em q.t.p e f é mensurável, então g é mensurável.

(5) Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência pontualmente limitada de funções mensuráveis, então $\sup_{n\geq 1} f_n$ e $\inf_{n\geq 1} f_n$ são mensuráveis.

(6) Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \to f$ em q.t.p, então f é mensurável.

(7) Se f, g são mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$, então $f + g$, cf, $f\,g$ são mensuráveis.

(8) Se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável também.

Demonstração do Teorema 2.

(1) Dado qualquer conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, como f é contínua,
$$\{f \in U\} = f^{-1}(U)$$
é aberto, logo mensurável, mostrando que a função f é mensurável.

(2) Dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, $\phi^{-1}(U)$ é aberto, pois ϕ é contínua. Mas
$$\{\phi \circ f \in U\} = \{f \in \phi^{-1}(U)\},$$
que é mensurável, pois f é mensurável. Logo, $\phi \circ f$ é mensurável.

(3) Seja $s \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função simples. A sequência constante $s_n = s$ para todo $n \geq 1$ converge para s, logo s é mensurável.

(4) Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\{g \in I\} &= \{g = f \text{ e } f \in I\} \cup \{g \neq f \text{ e } g \in I\} \\ &= \big(\{g = f\} \cap \{f \in I\}\big) \cup \{g \neq f \text{ e } g \in I\}\end{aligned}$$

O conjunto $\{g \neq f\}$ é negligenciável pois $g = f$ em q.t.p. Então, $\{g \neq f \text{ e } g \in I\} \subset \{g \neq f\}$ é negligenciável, logo também é mensurável. Ademais, $\{g = f\} = \{g \neq f\}^{\complement}$, então $\{g = f\}$ é mensurável.

Finalmente, $\{f \in I\}$ é mensurável, pois f é uma função mensurável. Concluímos que $\{g \in I\}$ é mensurável, logo g é uma função mensurável.

(5) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,
$$\{\sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \leq \lambda\} \quad \text{e} \quad \{\inf_{n \geq 1} f_n \geq \lambda\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq \lambda\}$$
Como os conjuntos $\{f_n \leq \lambda\}, \{f_n \geq \lambda\}$ são mensuráveis para todo $n \geq 1$, pois f_n são funções mensuráveis, segue que $\sup_{n \geq 1} f_n$ e $\inf_{n \geq 1} f_n$ são funções mensuráveis.

(6) Se $f_n \to f$ em q.t.p, então
$$f_n^+ \to f^+ \quad \text{e} \quad f_n^- \to f^- \quad \text{em q.t.p}$$
Pelo Teorema 1, paro todo $n \geq 1$, as funções sem sinais f_n^+ e f_n^- são mensuráveis, portanto f^+ e f^- também são mensuráveis, provando a mensurabilidade de $f = f^+ - f^-$.

(7) Existem sequências de funções simples $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$. Então, para todo $n \geq 1$,
$$s_n + \sigma_n, \quad c s_n \quad \text{e} \quad s_n \cdot \sigma_n$$
são simples e
$$s_n + \sigma_n \to f + g, \quad c s_n \to c f, \quad s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g$$
provando a mensurabilidade de $f + g$, $c f$ e $f\, g$.

(8) Pelo Teorema 1, as funções f^+ e f^-1 são mensuráveis, então $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também.

□

Integrabilidade absoluta

Definição 2. Uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada absolutamente integrável à Lebesgue se f é mensurável à Lebesgue e $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mathrm{m} < \infty$. Neste caso, definimos
$$\int_{R^d} f \, d\mathrm{m} := \int_{\mathbb{R}^d} f^+ \, d\mathrm{m} - \int_{\mathbb{R}^d} f^- \, d\mathrm{m}\,.$$

Observação 2. Como $0 \le f^+, f^- \le |f|$, pela monotonicidade da integral sem sinal, tem-se

$$0 \le \int f^+, \int f^- \le \int |f| < \infty$$

logo $\displaystyle\int f^+, \int f^- \in \mathbb{R}$, então

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}$$

Assim, a integral de Lebesgue de uma função absolutamente integrável é bem definida.

Observação 3. Suponha que $f = f_1 - f_2$ seja uma representação de f como uma diferença de funções mensuráveis sem sinais f_1 e f_2, onde $\displaystyle\int f_1, \int f_2 < \infty$. Então, $\displaystyle\int f = \int f_1 - \int f_2$.

De fato, como $f_1 - f_2 = f = f^+ - f^-$, temos

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2,$$

onde f_1, f^-, f^+, f_2 são funções mensuráveis *sem* sinais. Pela aditividade da integral sem sinal, tem-se

$$\int f_1 + \int f^- = \int f^+ + \int f_2\,,$$

logo,

$$\int f_1 - \int f_2 = \int f^+ - \int f^- = \int f\,.$$

A maioria das propriedades da integral sem sinal também vale para funções absolutamente integráveis.

Teorema 3. *Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$*

(1) (linearidade) $f + g$ e cf são absolutamente integráveis e $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$, $\displaystyle\int cf = c\int f$.

(2) (monotonicidade) Se $f \le g$ em q.t.p, então $\displaystyle\int f \le \int g$.

(3) (divisibilidade) Se E é um conjunto mensurável, então $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$ são absolutamente integráveis e $\displaystyle\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$.

(4) (a desigualdade triangular) $\displaystyle\left|\int f\right| \le \int |f|$.

Demonstração do Teorema 3.

(1) Pelo Teorema 2 (6), $f + g$ e cf são mensuráveis. Além disso, como $|f + g| \le |f| + |g|$ e $|f + g|, |f|, |g|$ são funções mensuráveis sem sinal, pela monotonicidade e linearidade da integral sem sinal temos

$$\begin{aligned}\int |f+g| &\le \int (|f| + |g|)\\ &= \int |f| + \int |g| < \infty\end{aligned}$$

mostrando a integrabilidade absoluta de $f + g$.

Como $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$, temos que

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),\ (f^+ + g^+) \text{ e } (f^- + g^-)$$

são funções mensuráveis sem sinais e, pela observação anterior,

$$\begin{aligned}
\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\
&= \left(\int f^+ + \int g^+ \right) - \left(\int f^- + \int g^- \right) \quad \text{(pela linearidade da integral sem sinal)} \\
&= \left(\int f^+ - \int f^- \right) + \left(\int g^+ - \int g^- \right) \\
&= \int f + \int g\,.
\end{aligned}$$

A prova da identidade $\int cf = c \int f$ é exercício.

(2) $f \le g$ em q.t.p implica $g - f \ge 0$ q.t.p. Portanto, $\int (g - f) \ge 0$. Mas , $g = f + (g - f)$ e, pela aditividade da integral,

$$\int g = \int f + \int (g - f) \ge \int f\,.$$

(3) Como $\mathbf{1}_E$ e $\mathbf{1}_{E^\complement}$ são funções simples, logo mensuráveis, pelo Teorema 2, $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis. Além disso, $|f \cdot \mathbf{1}_E| \le |f|$ então $\int |f \cdot \mathbf{1}_E| \le \int |f| < \infty$, mostrando que $f \cdot \mathbf{1}_E$ é absolutamente integrável. O mesmo vale para $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$. Claramente,

$$f = f \cdot \mathbf{1}_E + f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$$

e usando a linearidade da integral, segue que

$$\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}\,.$$

(4) Temos que $f \le |f|$ e $-f \le |f|$. Pela monotonicidade da integral,

$$\int f \le \int |f| \quad \text{e} \quad \int (-f) \le \int |f|$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left| \int f \right| &= \max \left\{ \int f, - \int f \right\} \\
&= \max \left\{ \int f, \int (-f) \right\} \le \int |f|\,.
\end{aligned}$$

□

Observação 4. Dados uma função absolutamente integrável $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e um conjunto mensurável E, denotamos por

$$\int_E f\, d\mathrm{m} := \int f \cdot \mathbf{1}_E\, d\mathrm{m}\,.$$

A propriedade da divisibilidade se torna

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f\,.$$

Ademais, uma função $f\colon E \to \mathbb{R}$ é dita mensurável se a extensão dela por 0, $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in E \\ 0 & \text{se} \quad x \notin E\,. \end{cases}$$

for mensurável. Neste caso, $\displaystyle\int_E f\, d\,\mathrm{m} := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}\, d\,\mathrm{m}\,.$