

AULA 18: A COMPATIBILIDADE DA INTEGRAL DE LEBESGUE COM A INTEGRAL DE RIEMANN-DARBOUX

O objetivo da construção da integral de Lebesgue foi obter um conceito mais geral e mais flexível. Provamos que, de fato, a integral de Lebesgue é uma extensão da integral de Riemann-Darboux.

Exercício 1. Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em q.t.p.. Então f é mensurável à Lebesgue.

Observação 1. Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável localizada em uma caixa. Então f é absolutamente integrável.

De fato, se $[-K, K] \times [-M, M]$ é a caixa onde f mora, isto é, se

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{para todo } \|x\| > K \text{ e} \\ |f(x)| &\leq M \quad \text{para todo } \|x\| \leq K, \end{aligned}$$

então

$$|f| \leq M \mathbf{1}_{[-K, K]^d},$$

logo

$$\int |f| \, dm \leq \int M \mathbf{1}_{[-K, K]^d} \, dm \leq M(2K)^d < \infty.$$

Teorema 1. Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann-Darboux. Então f é absolutamente integrável e

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a, b]} f \, dm.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Lebesgue para funções integráveis à Riemann, f é contínua em quase todo ponto. Pelo exercício anterior f é mensurável.

Além disso, f é limitada, o suporte dela, o intervalo $[a, b]$, é limitado, então f mora em uma caixa. Pela observação anterior f é absolutamente integrável.

Para provar a igualdade entre as integrais de Riemann-Darboux e a de Lebesgue, consideramos no início uma função escada

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k}.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s(x) \, dx = \sum_{k=1}^N c_k |I_k|.$$

Uma função escada também é simples, então

$$\int_{[a, b]} s \, dm = \sum_{k=1}^N c_k m(I_k) = \sum_{k=1}^N c_k |I_k|.$$

Vamos considerar o caso geral de uma função integrável à Riemann-Darboux qualquer.

Dado $\epsilon > 0$, como f é Darboux integrável, existem duas funções escada $s \leq f \leq \sigma$ tais que

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s \leq \epsilon.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma.$$

Por outro lado, toda função escada também é simples, e pela monotonicidade da integral de Lebesgue,

$$\int_{[a,b]} s \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \sigma.$$

Como os conceitos de integrabilidade já coincidem para funções escada, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma \quad \text{e} \\ \int_a^b s \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_a^b \sigma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \int_a^b f - \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Como ϵ foi arbitrário, segue que

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

□

Exercício 2. Se a integral imprópria f em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é convergente, então f é absolutamente integrável e sua integral de Lebesgue coincide com sua integral de Riemann imprópria.

Essa formulação é um pouco vaga, parte do exercício é esclarecê-la.

O ESPAÇO $L^1(\mathbb{R}^d)$

Seja $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ o conjunto de todas as funções absolutamente integráveis à Lebesgue. Então $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço vetorial e a integral de Lebesgue é uma transformação linear neste espaço. O objetivo é definir uma norma em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Note que, dada f em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, se $\int |f| \, dm = 0$, então $|f| = 0$ em q.t.p., logo $f = 0$ em q.t.p. (mas não necessariamente em todo ponto). Então, $\int |f| \, dm = 0$ não implica $f = 0$.

A relação

$$f \sim g \quad \text{se} \quad f = g \quad \text{em} \quad \text{q.t.p.}$$

é uma equivalência em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Seja

$$L^1(\mathbb{R}^d) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) / \sim$$

o espaço quociente correspondente.

Sempre identificamos uma classe de equivalência, ou seja, um elemento do espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$ com qualquer representante dela. Portanto, dizemos “Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ uma função” em vez de “Seja $[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$, onde f é um representante desta classe de equivalência”.

Isso é consistente com a filosofia de Lebesgue que afirma que conjuntos de medida zero não importam nesta teoria.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, dm.$$

A função $\|\cdot\|_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma.

- $\|f\|_1 = \int |f| \geq 0$ e se $\int |f| = 0$, então $f = 0$ em q.t.p., ou seja $f \sim 0$ (a função constante 0).
- se $c \in \mathbb{R}$ então

$$\|cf\|_1 = \int |cf| = \int |c| |f| = |c| \int |f| = |c| \|f\|_1.$$

- se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então f e g são absolutamente integráveis, logo $f + g$ também é absolutamente integrável e

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

em todo ponto.

Pela monotonicidade da integral,

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1,$$

mostrando a desigualdade triangular.

Concluimos que $L^1(\mathbb{R}^d)$ munido com $\|\cdot\|_1$, chamada “a norma um”, é um espaço normado. Provaremos mais tarde que é, na verdade um espaço de Banach.

A seguir re-enunciaremos a desigualdade de Markov no contexto de funções absolutamente integráveis.

Teorema 2 (a desigualdade de Chebyshev). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então para todo $\lambda > 0$ temos*

$$m\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Demonstração. A função $|f|$ é mensurável e sem sinal, logo, pela desigualdade de Markov,

$$m\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\int |f| \, dm}{\lambda} = \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

□

Para finalizar, vamos provar a invariância por translações da integral de Lebesgue. A prova usa um argumento muito comum na teoria da medida, que chamamos do “mecanismo padrão”.

Teorema 3 (invariância por translações). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^d$, seja $f_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$f_a(x) := f(x + a)$$

a translação de f por a . Então f_a é absolutamente integrável e

$$\int f(x + a) \, dm = \int f(x) \, dm.$$

Demonstração. A prova do teorema consiste em alguns passos.

Passo 1: A função f é a função indicadora de um conjunto mensurável:

$$f = \mathbf{1}_E.$$

Então,

$$f_a(x) = f(x + a) = \mathbf{1}_E(x + a) = \mathbf{1}_{E-a}(x).$$

Pela invariância por translação da medida de Lebesgue, o conjunto $E - a$ é mensurável e

$$m(E - a) = m(E),$$

provando a mensurabilidade de f_a e também que

$$\int f_a dm = \int \mathbf{1}_{E-a} dm = m(E-a) = m(E) = \int \mathbf{1}_E dm = \int f dm.$$

Passo 2: A função f é uma função simples, ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

onde E_i são conjuntos mensuráveis.

Pelo passo anterior e a linearidade da integral, neste caso

$$f_a = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i-a}$$

também é simples e

$$\int f_a dm = \int f dm.$$

Passo 3: Suponha que $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [a, b]$ é uma função mensurável sem sinal. Então existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$s_n \rightarrow f(x) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Então,

$$s_n(x+a) \rightarrow f(x+a) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, f_a é mensurável e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int f(x+a) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n(x+a) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n(x) dm = \int f(x) dm.$$

Passo 4: Finalmente, dada uma função absolutamente integrável $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, considerando a sua representação

$$f = f^+ - f^-, \text{ onde } f^+, f^- \geq 0,$$

pelo passo anterior segue que f_a^+, f_a^- são mensuráveis, logo f_a é mensurável e

$$\int f_a = \int f_a^+ - \int f_a^- = \int f^+ - \int f^- = \int f.$$

□

O *mecanismo padrão* pode ser usado para provar afirmações do tipo

“para toda função mensurável, vale uma certa propriedade”.

O argumento consiste em estabelecer essa propriedade passo a passo, para:

- (1) Funções indicadoras de conjuntos mensuráveis. Neste caso, a propriedade se torna uma afirmação sobre conjuntos mensuráveis.
- (2) Funções simples. Neste caso, usamos a possível linearidade da propriedade a ser estabelecida.
- (3) Funções simples sem sinais. Neste caso, usamos a aproximação de funções mensuráveis por funções simples e, possivelmente, alguns teoremas de limite para a integral de Lebesgue.
- (4) Funções absolutamente integráveis. Usamos a representação $f = f^+ - f^-$ de tal função e a linearidade da propriedade dada.