

AULA 20: ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

Construímos uma família de subconjuntos do espaço euclidiano chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e definimos a medida de tais conjuntos; introduzimos uma classes geral de funções no espaço euclidiano chamadas de funções Lebesgue mensuráveis e definimos um conceito de integração para tais funções.

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria semelhante em um cenário abstrato.

σ -ÁLGEBRAS E ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Definição 1. Dado um conjunto X , uma σ -álgebra sobre X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X tal que

- (1) $\emptyset \in \mathcal{B}$,
- (2) se $E \in \mathcal{B}$ então $E^c \in \mathcal{B}$,
- (3) se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Um par (X, \mathcal{B}) , onde X é um conjunto (o espaço ambiente) e \mathcal{B} é uma σ -álgebra sobre X é chamado de *espaço mensurável*.

Os elementos de \mathcal{B} são ditos conjuntos \mathcal{B} -mensuráveis ou simplesmente, mensuráveis.

Observação 1. Note que o espaço ambiente $X = \emptyset^c \in \mathcal{B}$. Além disso, \mathcal{B} é fechada também com respeito a interseções enumeráveis: se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\bigcap_{n \geq 1} E_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n^c \right)^c \in \mathcal{B}.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos gerais de σ -álgebras.

Exemplo 1 (de σ -álgebras). Seja X um espaço ambiente.

- (1) A σ -álgebra trivial: $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$.
- (2) A σ -álgebra discreta: $\mathcal{B} = 2^X = \{E : E \subset X\}$.
- (3) A σ -álgebra atômica. Dada uma partição

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$$

de X em “átomos”, seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha : \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \right\}.$$

Então \mathcal{B} é uma σ -álgebra (atômica). A prova deste fato é um exercício.

Note que a σ -álgebra trivial é atômica, que corresponde à partição

$$X = \emptyset \sqcup X,$$

enquanto a σ -álgebra discreta também é atômica, onde todos os singletons são átomos:

$$X = \bigsqcup_{x \in X} \{x\}.$$

- (4) A σ -álgebra diádica de determinada geração. Dado $n \geq 0$, considere a partição de reta real \mathbb{R} em intervalos diádicos de geração n ,

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$$

e a σ -álgebra atômica $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ correspondente.

A mesma construção pode ser feita em \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, usando caixas diádicas em vez de intervalos diádicos.

Geração de σ -álgebras. Dadas duas σ -álgebras \mathcal{B} e \mathcal{B}' , se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ dizemos que \mathcal{B}' é *mais fina* do que \mathcal{B} , ou que \mathcal{B} é mais grosseira do que \mathcal{B}' .

Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que a interseção de qualquer família $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de σ -álgebras sobre X também é uma σ -álgebra sobre X , o que nos permite introduzir o seguinte conceito.

Definição 2. Dada uma coleção \mathcal{F} de subconjuntos de um espaço ambiente X , seja

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{ \mathcal{B} : \mathcal{B} \supset \mathcal{F}, \mathcal{B} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra} \}.$$

Então $\sigma(\mathcal{F})$ é uma σ -álgebra sobre X chamada a σ -álgebra gerada por \mathcal{F} . Ela é a menor (ou a mais grosseira) σ -álgebra que contém a coleção \mathcal{F} .

Note que $2^X \supset \mathcal{F}$ e como 2^X é uma σ -álgebra, a interseção de σ -álgebras acima é bem definida.

Definição 3 (a σ -álgebra de Borel). Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a σ -álgebra gerada pela topologia do espaço euclidiano, ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma \{ U \subset \mathbb{R}^d : U \text{ aberto} \}.$$

Mais geralmente, dado um espaço topológico qualquer (X, \mathcal{T}) ,

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \{ U \subset X : U \text{ aberto} \}$$

é chamada a σ -álgebra de Borel do espaço (X, \mathcal{T}) .

Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ são chamados de conjuntos *borelianos*.

Exemplo 2 (de conjuntos borelianos). Todos os conjuntos abertos, fechados, do tipo F_σ (i.e., uniões enumeráveis de conjuntos fechados), do tipo G_δ (i.e., interseções enumeráveis de conjuntos abertos) são conjuntos borelianos.

O mecanismo padrão para conjuntos. Considere uma coleção \mathcal{F} de subconjuntos de X e a σ -álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por \mathcal{F} . Dada uma propriedade P sobre subconjuntos de X , para provar a afirmação

$$P(E) \text{ vale para todo } E \in \sigma(\mathcal{F})$$

basta provar que:

- (1) $P(E)$ vale para todo $E \in \mathcal{F}$;
- (2) A coleção

$$\mathcal{A} := \{ E \subset X : P(E) \text{ vale} \}$$

é uma σ -álgebra, ou seja,

- $P(\emptyset)$ vale,
- se $P(E)$ vale, então $P(E^c)$ vale,
- se $P(E_n)$ vale para todo $n \geq 1$ então $P(\bigcup_{n \geq 1} E_n)$ vale.

Proposição 1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(Y)$, sua pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$, i.e., ele é um conjunto boreliano em X .*

Demonstração. Para provar a afirmação

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(Y)$$

usamos o mecanismo padrão para conjuntos, lembrando que $\mathcal{B}(Y)$ é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Y .

- (1) Para todo conjunto aberto E in Y , como f é contínua, $f^{-1}(E)$ é aberto, então boreliano, ou seja, ele pertence a $\mathcal{B}(X)$.
- (2) Seja

$$\mathcal{A} := \{E \in \mathcal{B}(Y) : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Tem-se

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}(X)$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{B}(x)$ é uma σ -álgebra, $f^{-1}(E)^c \in \mathcal{B}(X)$ também. Mas $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c \in \mathcal{B}(X)$, mostrando que $E^c \in \mathcal{A}$.
- Se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{B}(X)$ é uma σ -álgebra, segue que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X),$$

mostrando que $\bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

□

Observação 2. A σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos borelianos do espaço euclidiano é *estritamente* mais grosseira de a de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue, ou seja

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d).$$

De fato, todo conjunto aberto é Lebesgue mensurável, então a σ -álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contém a σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ geradas pelos conjuntos abertos.

O exercício seguinte fornece um exemplo de conjunto não boreliano mas ainda mensurável à Lebesgue. A construção descrita abaixo, baseada no conjunto de Cantor e na função “escada do diabo” de Cantor, será usada para obter vários outros contraexemplos.

Exercício 1. Sejam $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor e $c: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função de Cantor, Considere a função

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 2], \quad f(x) = x + c(x).$$

Então,

- (i) f é uma função contínua, sobrejetiva e (estritamente) crescente, portanto é *bi-contínua*.
- (ii) A imagem do conjunto de Cantor pela função f é mensurável e

$$m(f(\mathcal{C})) = 1.$$

Por isso (usando um exercício anterior) existe um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$.

- (iii) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}.$$

Então E é mensurável à Lebesgue mas não é um conjunto boreliano.

Proposição 2. Cada uma das seguintes famílias de conjuntos gera a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

- (i) A família de conjuntos abertos.
- (ii) A família de conjuntos fechados.
- (iii) A família de conjuntos compactos.
- (iv) A família de bolas abertas (ou fechadas).
- (v) A família de caixas (ou de caixas diádicas).

Demonstração. Exercício. □

MEDIDAS ABSTRATAS

Definição 4. Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável. Uma função

$$\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$$

é chamada de *medida* (σ -aditiva) em (X, \mathcal{B}) se

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$ e
- (ii) para toda coleção mensurável de conjuntos mensuráveis *disjuntos* $\{E_n: n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

A tripla (X, \mathcal{B}, μ) , consistindo em um conjunto X , uma σ -álgebra \mathcal{B} sobre X e uma medida μ em (X, \mathcal{B}) é chamada de *espaço de medida*.

Em seguida apresentamos alguns exemplos de espaços de medida.

Exemplo 3. O espaço da medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), m)$. A medida m é também referida como a medida de volume.

Um outro exemplo comum é o espaço $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ da medida de Borel, ou seja, o espaço de Borel munido com a restrição da medida de volume.

Exemplo 4. A medida trivial em (X, \mathcal{B}) : $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

Exemplo 5 (a medida de Dirac). Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável qualquer e seja $x \in X$ um ponto. A medida de Dirac com centro em x é dada por

$$\delta_x: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty), \quad \delta_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases} = \mathbf{1}_E(x).$$

Note que a função δ_x é, de fato, uma medida:

- (i) $\delta_x(\emptyset) = \mathbf{1}_{\emptyset}(x) = 0$.
- (ii) Se $\{E_n: n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ são disjuntos, então

$$\begin{aligned} \delta_x\left(\bigsqcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \mathbf{1}_{\bigsqcup_{n \geq 1} E_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n). \end{aligned}$$

Exemplo 6 (soma de medidas de Dirac ou de pontos de massa). Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável. Dados pontos $x_1, \dots, x_k \in X$ e números $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, seja

$$\mu := \sum_{i=1}^k c_i \delta_{x_i}.$$

Então μ é uma medida em (X, \mathcal{B}) (exercício) chamada de soma de medidas de Dirac com massa concentrada em x_1, \dots, x_k e pesos c_1, \dots, c_k .

A ideia é que além do volume (ou área, ou comprimento), a massa de um objeto também pode ser considerada como uma medida. Uma soma de medidas de Dirac corresponde ao caso de uma coleção *discreta* de centros de massa.

Exemplo 7. Mais geralmente, dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ de medidas em (X, \mathcal{B}) e uma sequência $\{c_n\}_{n \geq 1}$ de números não negativos,

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n$$

é uma medida em (X, \mathcal{B}) (exercício).

Exemplo 8 (medida de contagem). Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável. A medida de contagem é a função $\#: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$, $\#(E) =$ a cardinalidade de E se E for finito e $\#(E) = \infty$ se E for um conjunto infinito.

Em seguida listamos algumas propriedades básicas de uma medida. Começamos com uma notação útil.

Notação. Dada uma sequência $\{E_n\}_{n \geq 1}$ de conjuntos, usamos as seguintes notações:

- $E_n \nearrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \subset E_{n+1}$ e $\bigcup_{n \geq 1} E_n = E$.
- $E_n \searrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \supset E_{n+1}$ e $\bigcap_{n \geq 1} E_n = E$.

Proposição 3. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida. As seguintes afirmações são válidas.

- (i) (monotonicidade) Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Se $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$.
- (ii) (σ -subaditividade) Se $\{E_n: n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

- (iii) (convergência monótona para conjuntos) Sejam $\{E_n: n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ e $E \in \mathcal{B}$.

- Se $E_n \nearrow E$ então $\mu(E_n) \rightarrow \mu(E)$ quando $n \rightarrow \infty$.
- Se $E_n \searrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$ então $\mu(E_n) \rightarrow \mu(E)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. O argumento é idêntico ao da medida de Lebesgue em \mathbb{R}^d e é deixado com exercício. \square

Da mesma forma que no caso da medida de Lebesgue, introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 5. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida. Um conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$ é chamado μ -negligenciável, ou de medida nula se $\mu(E) = 0$.

Uma propriedade $P(x)$ é válida para quase todo ponto $x \in X$ com respeito à medida μ , ou, de uma forma mais concisa, dizemos que $P(x)$ vale para μ -q.t.p. $x \in X$ se o conjunto

$$\{x \in X: P(x) \text{ não é válida}\}$$

é \mathcal{B} -mensurável e de medida nula.

Observação 3. Em geral, um subconjunto de um conjunto negligenciável *não* e necessariamente mensurável. Por exemplo, considerando o espaço da medida de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, o conjunto $E \subset \mathcal{C}$ do Exercício 1 não é boreliano, embora o conjunto de Cantor \mathcal{C} seja boreliano e $m(\mathcal{C}) = 0$.

Esta observação motiva a seguinte definição.

Definição 6. Um espaço de medida (X, \mathcal{B}, μ) é dito *completo* se todo conjunto de um conjunto μ -negligenciável é mensurável, ou seja,

$$\text{se } E \in \mathcal{B}, \mu(E) = 0 \text{ e } F \subset E \text{ então } F \in \mathcal{B}.$$

Por exemplo, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), m)$ é completo, mas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ não é completo.