

AULA 22: A INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO MENSURÁVEL

Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida. A construção da integral de uma função mensurável em X segue exatamente a mesma abordagem que a da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

(1) Seja $s: X \rightarrow [0, \infty]$,

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

uma função simples. Então,

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i).$$

Resta mostrar que este conceito é bem definido, ou seja, se s possui duas representações do tipo

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j},$$

então

$$\sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^l d_j \mu(F_j),$$

A prova deste fato é igual a do cenário de funções simples no espaço euclidiano.

(2) Seja $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples. Então, já que s pode ser representada como

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

onde os conjuntos mensuráveis $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos, segue que

$$s^\pm = \sum_{i=1}^k c_i^\pm \mathbf{1}_{E_i} \text{ e } |s| = \sum_{i=1}^k |c_i| \mathbf{1}_{E_i}$$

Portanto, s^+ , s^- , $|s|$ são funções simples sem sinais.

A função s é dita absolutamente integrável se

$$\int_X s \, d\mu < \infty.$$

Neste caso, definimos

$$\int_X s \, d\mu := \int_X s^+ \, d\mu - \int_X s^- \, d\mu.$$

(3) Seja $f: X \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável. Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ é simples} \right\}.$$

Não é difícil ver que

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ é simples e finita} \right\},$$

e, de fato, outras restrições sobre s podem ser feitas, dependendo do contexto (por exemplo, em \mathbb{R}^d , s pode ser escolhida com suporte compacto).

- (4) Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, como f é o limite pontual de uma sequência de funções simples, segue imediatamente que f^+ , f^- e $|f|$ também são tais limites, logo são mensuráveis também.

Chamamos f de absolutamente integrável se

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty$$

Neste caso,

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Teorema 1. (*propriedades básicas da integral*)

Sejam (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ (ou $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$) duas funções mensuráveis (ou, respectivamente, absolutamente integráveis). As seguintes valem:

- (1) (*monotonicidade e equivalência*)

Se $f \leq g$ em μ -q.t.p então $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

Se $f = g$ em μ -q.t.p então $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

- (2) (*linearidade*)

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$$

- (3) (*divisibilidade*)

Se $E \in \mathcal{B}$ então $f \mathbf{1}_E$ e $f \mathbf{1}_{E^c}$ são mensuráveis e

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \mathbf{1}_E \, d\mu + \int_X f \mathbf{1}_{E^c} \, d\mu.$$

Denotado por

$$\int_E f \, d\mu := \int_X f \mathbf{1}_E$$

temos

$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu.$$

- (4) (*a desigualdade de Markov*)

Se $f: X \rightarrow [0, \infty]$, para todo $\lambda > 0$ tem-se

$$\mu \{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda}.$$

(5)

$$\int_X |f| d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \text{ } \mu\text{-q.t.p.}$$

$$\text{Se } \int_X |f| d\mu < \infty \text{ então } |f| < \infty \text{ } \mu\text{-q.t.p.}$$

Demonstração. O argumento é o mesmo que no caso da integral de Lebesgue. Desrevemos os passos principais.

- (1) O primeiro passo é estabelecer a monotonicidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se da definição
A equivalência é uma consequência imediata da monotonicidade.
- (2) De novo, o primeiro passo é provar linearidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se do eorema de convergência monótona, que será tratado na seção seguinte.
- (3) Produto de funções mensuráveis é mensurável, enquanto a função indicadora de um conjunto mensurável é mensurável. Portanto, $f\mathbf{1}_E$ e $f\mathbf{1}_{E^c}$ são mensuráveis.
Como

$$f = f\mathbf{1}_E + f\mathbf{1}_{E^c},$$

a divisibilidade segue da linearidade.

- (4) Como $f \geq \lambda \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}}$, a desigualdade de Markov é consequência da monotonicidade da integral:

$$\int_X f d\mu \geq \int_X \lambda \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}} d\mu = \lambda \mu \{f \geq \lambda\},$$

Logo

$$\mu \{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f d\mu}{\lambda}.$$

- (5) Claramente

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu \{|f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\int_X |f| d\mu}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0.$$

Logo $\mu \{|f| \geq \frac{1}{n}\} = 0$ para todo $n \geq 1$. Concluimos que $\mu \{f \neq 0\} = 0$, ou seja, $f = 0$ μ -q.t.p.

Finalmente,

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|f| \geq n\}$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$,

$$\mu \{|f| \geq n\} \leq \frac{\int_X |f| d\mu}{n} \rightarrow 0$$

pois $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Como, evidentemente, a sequência de conjuntos $\{|f| \geq n\}_{n \geq 1}$ é não crescente, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos tem-se

$$\mu \{|f| = \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \{|f| \geq n\} = 0.$$

□

Dado um espaço de medida (X, \mathcal{B}, μ) , seja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ é mensurável e } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

o espaço vetorial de funções absolutamente integráveis em X .

De fato, se $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f + g$ é mensurável (pois f e g são mensuráveis) e como

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

tem-se

$$\int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < \infty,$$

logo $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$ então cf é mensurável e

$$\int_X |cf| d\mu = |c| \int_X |f| d\mu < \infty,$$

então $cf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Definimos o espaço L^1 por

$$L^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) / \sim$$

onde $f \sim g$ se $f = g$ em q.t.p.

Como pelo Teorema 1 (5), dada uma função $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\int_X |f| d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \text{ em q.t.p.}$$

acontece que

$$\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

é uma norma em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Então, $(L^1(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado. Provaremos, no próximo capítulo que, na verdade, é um espaço de Banach.

Outras notações comuns deste espaço são $L^1(X)$, $L^1(d\mu)$, $L^1(X, \mu)$ e etc.

Ademais, dado um número real $1 \leq p < \infty$,

Seja

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

módulo igualdade q.t.p.

Munido com

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

$(L^p(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_p)$ também é um espaço normado. Essa afirmação será provada no próximo capítulo. Entretanto, vamos estabelecer a desigualdade de Chebyshev para funções L^p .

Teorema 2. (a desigualdade de Chebyshev) *Sejam (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então, para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

Demonstração. Aplicamos a desigualdade de Markov à função $|f|^p$.

Primeiro, como $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|^p$ é contínua, segue que

$$\varphi \circ f = |f|^p$$

é mensurável (e sem sinal).

Como

$$|f| \geq \lambda \Leftrightarrow |f|^p \geq \lambda^p,$$

pela desigualdade de Markov,

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} = \mu\{|f|^p \geq \lambda^p\} \leq \frac{\int_X |f|^p d\mu}{\lambda^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

□

OS TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA

Sejam (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais e f uma outra função mensurável sem sinal.

Suponha que

$$f_n \rightarrow f \text{ em q.t.p.}$$

Questão. Quando podemos concluir que

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu \quad ?$$

Ou seja, quando podemos trocar o limite com a integral?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \stackrel{?}{=} \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Uma situação especial, similar a da integral é apresentada na seguinte proposição.

Proposição 1 (convergência uniforme em um espaço de medida finita). *Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida finita, i.e., $\mu(X) < \infty$. Sejam $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais ou uma sequência de funções absolutamente integráveis e f uma outra função real.*

Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente então

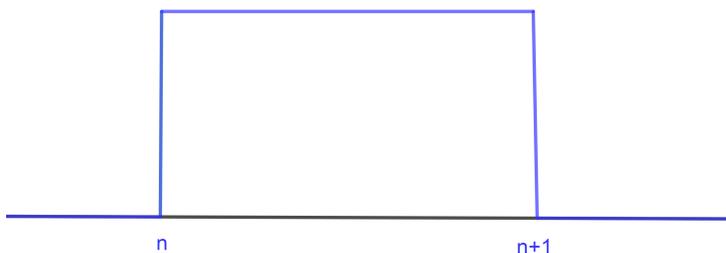
$$\int_X f_n \rightarrow \int_X f.$$

Demonstração. Exercício.

□

O resultado anterior vale sob uma hipótese muito restritiva, a de convergência uniforme. Procuramos tais resultados de convergência da integral sob hipóteses sem mais gerais. Mas antes de enunciar estes resultados, notamos que há casos em que *não* podemos trocar o limite e a integral. Descrevemos três exemplos simples mas típicos de obstruções a essa propriedade, a saber, exemplos de funções “bump” em movimento.

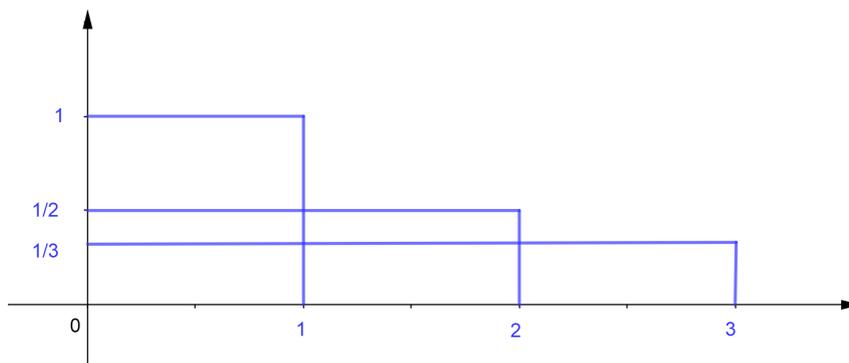
Exemplo 3. Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = m$, a medida de Lebesgue. Seja $f_n = \mathbf{1}_{[n, n+1]}$ para todo $n \geq 1$.



Então $f_n \rightarrow 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = m([n, n+1]) = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dm.$$

Exemplo 4. Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = m$ de Lebesgue. Para todo $n \geq 1$, seja $f_n = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}$.

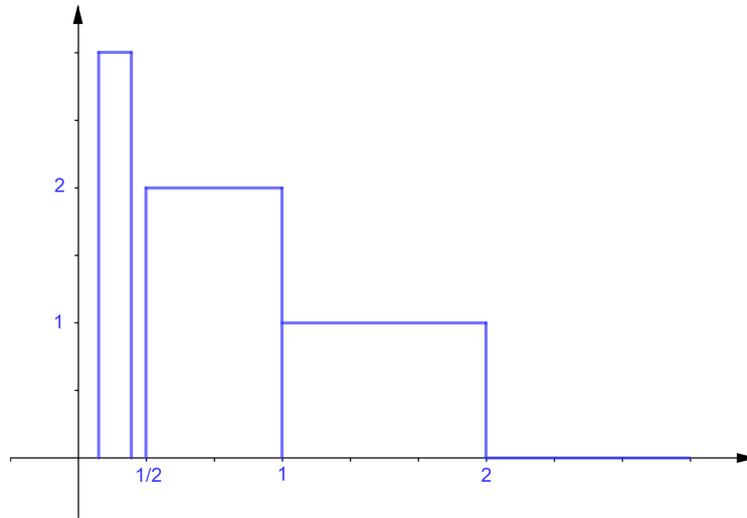


Como $|f_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, temos que $f_n \rightarrow 0$ uniformemente. Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n} m([0, n]) = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dm,$$

mostrando também que a hipótese $\mu(X) < \infty$ da Proposição 1 é necessária.

Exemplo 5. Considere o espaço $X = [0, 2]$ munido com a medida $\mu = m$ de Lebesgue restrita ao intervalo $[0, 2]$. Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n\mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$.



Então, $f_n \rightarrow 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{[0,2]} f_n \, dm = n m \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right] \right) = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{[0,2]} 0 \, dm.$$