AULA 23: OS TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA (CONTINUAÇÃO)

Teorema 1 (de convergência monótona)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis sem sinais, i.e.*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Demonstração. A prova deste resultado é similar a do caso da integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Ela usa um argumento de tempos de parada para conseguir algum comportamento uniforme da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Esboçamos o argumento abaixo.

Seja

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)\,.$$

Então, f é mensurável.

Pela monotonicidade da integral, já que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, a sequência $\left\{\int_X f_n \, d\mu\right\}_{n\geq 1}$ é não decrescente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ existe e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Resta provar a desigualdade aposta:

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Como

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon 0 \leq s \leq f,\ s \text{ é simples e finita} \right\},$$

basta provar que dada uma função simples e finita s tal que $0 \leq s \leq f$, temos que

$$\int_X s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Então é suficiente provar que

$$(1-\epsilon) \int_X s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Escrevemos

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i},$$

onde para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0, \infty)$ e $E_i \in \mathcal{B}$ são conjuntos disjuntos.

Fixe $j \in [k]$. Se $x \in E_j$ então $s(x) = c_j$, logo

$$(1-\epsilon)c_j = (1-\epsilon)s(x) < f(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x).$$

Portanto, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1-\epsilon)c_j < f_{n_x}(x)\,. \tag{1}$$

Definimos, para todo $n \geq 1$,

$$E_{j,n} := \{x \in E_j \colon (1-\epsilon)c_j < f_n(x)\}\,.$$

Então $E_{j,n}$ é mensurável (já que f_n e E_j são mensuráveis) e claramente, usando (1) e a monotonicidade da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$, segue que

$$E_{j,n} \nearrow E_j \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos, segue que

$$\mu(E_{j,n}) \to \mu(E_j) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Para todo $n \geq 1$ definimos

$$s_n := \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon)c_j\, \mathbf{1}_{E_{j,n}}\,.$$

Não é difícil perceber que para todo $x \in X$, tem-se

$$s_n(x) \leq f_n(x).$$

Então,

$$\int_X f_n\, d\mu \geq \int_X s_n\, d\mu = \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon)c_j\, \mu(E_{j,n}).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geq \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon)c_j\, \mu(E_j) = (1-\epsilon)\int_X s\, d\mu,$$

finalizando a prova do teorema. □

Consequências do Teorema de convergência monótona

Teorema 2 (de Tonelli)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n \colon X \to [0,\infty]$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é mensurável e*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Evidentemente, a sequência

$$s_n := f_1 + \ldots + f_n\ ,\ n \geq 1$$

de somas parciais satisfaz as hipóteses do Teorema de convergência monótona (já que $f_n \geq 0$).

Portanto,

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\, d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

□

Lema 1 (de Borel-Cantelli)**.** *Seja* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ *uma sequência de conjuntos mensuráveis. Suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Então, μ*-q.t.p.* $x \in X$ *pertence apenas a um número* finito *de conjuntos* E_n*, ou seja, para* μ*-q.t.p.* $x \in X$*,*

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty.$$

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, seja $\mathbf{1}_{E_n}$ a função indicadora do conjunto mensurável E_n. Note que, dado $x \in X$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x)$$

conta exatamente o número de conjuntos E_n onde x pertence, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}.$$

Pelo Teorema de Tonelli,

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 1 (5) da aula 22,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} < \infty \quad \mu\text{-q.t.p.},$$

assim mostrando que

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty$$

para μ-q.t.p. $x \in X$. □

Lema 2 (de Fatou)**.** *Sejam* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida e* $\{f_n\}_{n \geq 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis* $f_n \colon X \to [0, \infty]$ *(uma sequência não necessariamente monótona). Então,*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f \, d\mu$$

Demonstração. Seja

$$g := \liminf_{n \to \infty} g_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} f_k \, .$$

Para todo $n \geq 1$ denote por $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Então g_n é mensurável e

$$g_n \nearrow g \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona, temos que

$$\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu \quad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu &= \int_X g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X \inf_{k\geq n} f_k\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\int_X f_k\,d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\int_X f_k\,d\mu,\end{aligned}$$

onde a desigualdade acima é válida por causa da monotonicidade da integral.

De fato,

$$\inf_{k\geq n} f_n \;\leq\; f_k \text{ para todo } k\geq n$$

então

$$\int_X \inf_{k\geq n} f_n\,d\mu \;\leq\; \int_X f_k\,d\mu \;\text{ para todo } k\geq n,$$

logo

$$\int_X \inf_{k\geq n} f_n\,d\mu \;\leq\; \inf_{k\geq n}\int_X f_k\,d\mu.$$

□

Observação 1. A desigualdade no lema de Fatou pode ser estrita. Isso acontece por exemplo com alguns tipos de sequências de funções bump em movimento.

Para todo $n\geq 1$, seja $f_n := n\,\mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n}]}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
Então $f_n\to 0$ em todo ponto e

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\inf f_n\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0\,d\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu.$$

Um outro exemplo é a sequência

$$f_n := \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{[0,n]}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

de funções bump baixas e longas (em vez de altas e curtas).

Temos que $f_n\to 0$ uniformimente, enquanto $\int f_n = 1 \to 1 > 0 = \int 0$.

Observação 2. A condição $f_n\geq 0$ no lema de Fatou (ou, pelo menos, uma outra cota inferior apropriada) é necessária.

Por exemplo, consideremos, para todo $n\geq 1$,

$$f_n := -\frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{[n,2n]}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

temos que $f_n\to 0$ uniformimente, logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\inf f_n\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0\,d\mu = 0,$$

enquanto

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu = -1 \to -1 < 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\inf f_n\,d\mu > \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\mu.$$

Teorema 3 (de convergência dominada)**.** *Sejam* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida,* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis,* $f_n \colon X \to \mathbb{R}$*, e* $f \colon X \to \mathbb{R}$ *uma outra função tal que*

$$f_n \to f \text{ em } \mu - q.t.p.$$

Suponha que exista $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $\mu - q.t.p.$ *e para todo* $n \geq 1$ *(ou seja, suponha que a sequência* $\{f_n\}_{n\leq 1}$ *seja dominada por uma função absolutamente integrável).*

Então, $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ *e*

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ e $|f| \leq g$ $\mu - q.t.p.$ para todo $n \geq 1$, seque que $|f| \leq g$ $\mu - q.t.p.$ Logo,

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty,$$

mostrando que $f \in L^1(X, B, \mu)$.

Como $|f_n| \leq g$ $\mu - q.t.p.$, temos que

$$-g \leq f_n \leq g \;\; \mu - q.t.p.,$$

então

$$\begin{cases} f_n + g \geq 0 & \mu - q.t.p. \\ g - f_n \geq 0 & \mu - q.t.p. \end{cases}$$

Portanto, podemos aplicar o lema de Fatou é aplicável às sequências $\{f_n + g\}_{n\geq 1}$ e $\{g - f_n\}_{n\geq 1}$.

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n + g) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g) \, d\mu.$$

  Como

  $$\int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n + g) \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to n} f_n \, d\mu + \int_X g,$$
  $$\liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g) \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

e $\int_X g \, d\mu \in \mathbb{R}$, segue que

(2)
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) \, d\mu.$$

  Como

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} (-f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

  segue que

(3)
$$\int_X \lim_{n\to\infty} \sup f_n \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \sup \int_X f_n \, d\mu.$$

Combinando (2) e (3), tem-se

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \;\le\; \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;=\; \int_X f\,d\mu,$$

logo $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$ existe e é igual a $\int_X f\,d\mu$. □

Corolário 1. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n \colon X \to \mathbb{R}\}_{n\ge 1}$ tal que $f_n \to f$ em μ-q.t.p. e $|f_n| \le g$ para todo $n \ge 1$ e para alguma função $g \in L^1(X)$, segue que

$$f_n \to f \text{ em } L^1\,.$$

Demonstração. Como $|f_n| \le g$ e $g \in L^1(X)$, tem-se

$$\int_X |f_n|\;d\mu \;\le\; \int_X g\,d\mu < \infty,$$

logo $f_n \in L^1(X)$.

Já que $f_n \to f$ em μ-q.t.p.,

$$|f_n \,-\, f| \to 0 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

Além disso,

$$|f_n \,-\, f| \;\le\; |f_n| \,+\, |f| \;\le\; g \,+\, |f| \;\; \mu - q.t.p.$$

e

$$\int_X (g \,+\, |f|)\,d\mu \;=\; \int_X g\,d\mu \,+\, \int_X |f|\;d\mu \,<\, \infty,$$

portanto $g + |f| \in L^1(X)$.

Pelo teorema de convergência dominada aplicada à sequência $\{|f_n \,-\, f|\}_{n\ge 1}$, segue que

$$\|f_n \,-\, f\|_1 \;=\; \int_X |f_n \,-\, f|\;d\mu \;\to\; \int_X 0\,d\mu \;=\; 0,$$

mostrando que $f_n \to f$ com respeito a norma um (a norma L^1).

□

Exercício 1. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2 \text{ sen}\left(\frac{1}{nx}\right)\,dx.$$

Solução. Para todo $n \ge 1$, definimos $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} n\,x^2 \text{ sen}\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f_n é contínua em $[0,1]$, logo é Rieman e Lebesgue integrável em $[0,1]$. Além disso,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \;=\; \int_{[0,1]} f_n\,\mathrm{dm}.$$

Se $x \neq 0$, então

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(\frac{1}{nx})}{\frac{1}{nx}} \cdot x \;\to\; 1 \cdot x \;=\; x \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Note que $f \in L^1([0,1], \mathrm{m})$, pois

$$\int_{[0,1]} |f| \, d\mathrm{m} = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} < \infty.$$

Além disso, já que $|\frac{\operatorname{sen} t}{t}| \leq 1$ para todo $t \neq 0$, temos que $|f_n(x)| \leq x$ para todo $x \neq 0$. Então o teorema de convergência dominada é aplicável e temos que

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_{[0,1]} f_n \, d\mathrm{m} \to \int_{[0,1]} x \, d\mathrm{m} = \frac{1}{2} \, .$$

$\square$