AULA 25: OS ESPAÇOS L^p $(1 \le p \le \infty)$

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $p \in [1, \infty]$. Vamos relembrar as definições dos espaços de funções $L^p(X)$.

- $1 \le p < \infty$. Dizemos que $f \in L^p(X)$ se f é mensurável e $\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Neste caso,
$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$
- $p = \infty$. Dizemos que $f \in L^\infty(X)$ se f é mensurável e existe $C < \infty$ tal que $|f(x)| \le C$ para μ-q.t.p. $x \in X$. Neste caso,
$$\|f\|_\infty := \inf \{ C \in \mathbb{R} \colon \ |f(x)| \le C \quad \mu\text{-q.t.p.} \} .$$

Definição 1. Dois números $p, q \in [1, \infty]$ são (Hölder) conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Por exemplo, 2 e 2 são Hölder conjugados, e também 1 e ∞.

Lema 1 (a desigualdade de Young)**.** *Se $a, b \ge 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Demonstração. A função $\log \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é côncava. Então,
$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \ge \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$
$\square$

Teorema 1 (a desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ então $f\,g \in L^1(\mu)$ e $\|f\,g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q$.*

Exercício 1. Pelo teorema anterior, se $f, g \in L^2(X)$ então $f \cdot g \in L^1(X)$. Encontre um exemplo mostrando que o produto $f \cdot g$ não necessariamente pertence a $L^1(X)$ se $f, g \in L^1(X)$.

Além disso, mostre que se $\mu(X) < \infty$ então $L^\infty(X) \subset L^2(X) \subset L^1(X)$. Mais geralmente, se $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ então $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$.

Demonstração (da desigualdade de Hölder).

- $p = 1$ e $q = \infty$ (ou vice versa). Temos $g \in L^\infty(X)$. Seja $C < \infty$ tal que $|g(x)| \le C$ para μ-q.t.p. $x \in X$. Então $|f(x)\, g(x)| \le C \, |f(x)|$ para μ-q.t.p. $x \in X$. Integrando em x segue que
$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, d\mu \le \int_X C \, |f| \, d\mu = C \, \|f\|_1 < \infty .$$

Portanto $fg \in L^1(X)$ e, se $|g(x)| \le C$ μ-q.t.p. $x \in X$ então $\|fg\|_1 \le C \, \|f\|_1$.

Se $\|f\|_1 \ne 0$, então $\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_1} \le C$, e tomando o ínfimo sobre todos tais C, concluímos que
$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_1} \le \|g\|_\infty ,$$
mostrando a afirmação.

Se $\|f\|_1 = 0$ então $f = 0$ μ-q.t.p., portanto $fg = 0$ μ-q.t.p. e a afirmação é evidente.

- $p, q \in (1, \infty)$. Se $\|f\|_p = 0$ (argumento similar se $\|g\|_q = 0$) tem-se

$$\int |f|^p \, d\mu = 0 \implies |f|^p = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \implies f = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \implies fg = 0 \ \mu\text{-q.t.p.}.$$

Neste caso, a desigualdade é evidente.

Logo, podemos supor que $\|f\|_p \neq 0, \|g\|_q \neq 0$. Fixe $x \in X$ e denote por

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

A desigualdade acima vale para todo $x \in X$, integrando em x temos:

$$\int_X \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \, d\mu \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, .$$

Concluímos que

$$\frac{\int |fg| \, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq 1,$$

logo $\|fg_1\| = \displaystyle\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$. □

Teorema 2. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^p(X)$ é um espaço vetorial para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Se $f \in L^p(X), c \in \mathbb{R}$, é fácil verificar que $cf \in L^p(X)$. Logo, basta provar que se $f, g \in L^p(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ então $\|f + g\|_p < \infty$.

- O caso $p = \infty$ é exercício.

- Suponha que $1 \leq p < \infty$.

Se $a, b \geq 0$ então a seguinte desigualdade vale:

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \, .$$

De fato, se $p \geq 1$, a função $[0, \infty) \ni x \mapsto x^p$ é convexa. Então,

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2} a^p + \frac{1}{2} b^p \, ,$$

logo

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \, .$$

Portanto,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Integrando em x, temos que

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p \leq 2^{p-1}\left(\int |f|^p + \int |g|^p \right) = 2^{p-1}(\|f\|_p^p + ||g_p^p) < \infty \, ,$$

mostrando que $f + g \in L^p(X)$. □

Teorema 3. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então, $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração.

▪ O caso $p = \infty$ é exercício.

▪ Suponha que $1 \leq p < \infty$. O único axioma da norma que precisamos verificar é a desigualdade triangular:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{(a desigualdade de Minkowski).}$$

Temos que

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \int |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu$$

Seja q o conjugado à Hölder de p, logo, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, portanto $(p-1)q = p$. Daí,

$$(\,|f+g|^{p-1}\,)^q = |f+g|^p$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int |f| \, |f+g|^{p-1} &= ||f \ |f+g|^{p-1}\,||_1 \\
&\leq \|f\|_p \ || \ |f+g|^{p-1}\,||_q \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{p} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{p} \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q}} \\
&= \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

Logo, mostramos que

$$\int |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \|f\|_p \ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} .$$

Similarmente,

$$\int |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \|g\|_p \ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} .$$

Portanto,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Como $p - \frac{p}{q} = 1$, segue que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Teorema 4 (Riesz-Fischer)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ (i.e espaços normados completos).*

Demonstração.
▪ O caso $p = \infty$.
Seja $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^\infty(X)$ uma sequência de Cauchy (com respeito à norma L^∞). Para todo $n \geq 1$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f_l\|_\infty < \frac{1}{m} \quad \forall k, l \geq n_m .$$

Logo, existe $W_{k,l,m} \in \mathcal{B}, \mu(W_{k,l,m}) = 0$ tal que

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall x \in W_{k,l,m}^{\complement} .$$

Seja $W = \bigcup_{k,l,m} W_{k,l,m}$ união enumerável. Então, $W \in \mathcal{B}$ e $\mu(W) = 0$. Afirmamos que se $x \in W^{\complement}$ então $\{f_n(x)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ é Cauchy. De fato, para todo $x \in W^{\complement}$ e $m \geq 1$ temos

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall k, l \geq n_m \tag{1}$$

Seja

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) & \text{se} \quad x \in W^{\complement} \\ 0 & \text{se} \quad x \in W \end{cases}$$

Logo, f é mensurável. Na desigualdade (1), tomando $l \to \infty$, segue que para todo $x \in W^{\complement}$,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall k \geq n_m, \tag{2}$$

já que $f(x) = \lim\limits_{l\to\infty} f_l(x)$.
Em particular,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x)| \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \\ &\leq \frac{1}{m} + |f_k(x)| , \end{aligned}$$

e como f_k é essencialmente limitada, f também é essencialmente limitada, i.e, $f \in L^\infty(X)$.
Pela desigualdade (2) temos que $f_k \to f$ uniformemente em $W^{\complement}$. Como $\mu(W) = 0$, concluímos que $f_k \to f$ em L^∞, portanto a sequência de Cauchy $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset L^\infty(X)$ possui um limite $f \in L^\infty(X)$, mostrando a completude do espaço $L^\infty(X)$

▪ O caso $1 \leq p < \infty$. Usaremos o seguinte resultado.

Lema 2. *Seja $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p < \infty$, então existe $g \in L^p(X)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g$ μ-q.t.p. em $L^p(X)$.*

Vamos usar o lema para provar que dada $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(X)$ uma sequência de Cauchy existe $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ subsequência convergente. Como $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é Cauchy em $L^p(X)$,

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0 \text{ quando } n, m \to \infty .$$

Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que

$$\left\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\right\|_p < \frac{1}{2^k} \text{ para todo } k \geq 1\,.$$

Seja $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$. Como $\|g_k\|_p < \dfrac{1}{2^k}$ temos que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} < \infty$. Então pelo lema anterior $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge em $L^p(X)$ para uma função $g \in L^p(X)$. Temos

$$\sum_{k=1}^{m} g_k = f_{n_1} - f_{n_2} + f_{n_2} - f_{n_3} + \ldots + f_{n_m} - f_{n_{m+1}} = f_{n_1} - f_{n_{m+1}}\,.$$

Então,

$$f_{n_{m+1}} = f_{n_1} - \sum_{k=1}^{m} g_k.$$

Concluímos que $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge em $L^p(X)$ para $f := f_{n_1} - g$. Não é difícil concluir que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ mesmo é convergente. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é Cauchy em $L^p(X)$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Ainda, $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ é convergente em $L^p(X)$, então existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_k} - f\|_p < \epsilon \quad \forall k \geq k_\epsilon.$$

Então, para todo n suficientemente grande,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

$\square$

Demonstração do lema. Considere a sequência de funções mensuráveis $\{|g_n|\}_{n\geq 1}$. Pelo teorema de Tonelli, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ é mensurável e

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|\, d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |g_n|\, d\,\mu$$

Sejam $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |g_k|$ (a soma parcial) e $h = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ (a soma da série). Então $h_n \nearrow h$ em todo ponto. Em particular, $h_n^p \nearrow h^p$ em todo ponto. Portanto, pelo TCM, $\displaystyle\int_X h_n^p \to \int_X h^p$. Então,

$$\left(\int_X h_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|h_n\|_p = ||\sum_{k=1}^{n} |g_k|\;||_p \leq \sum_{k=1}^{n} |\,|g_k|\,|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,|g_k|\,|_p < \infty\,.$$

Concluímos que

$$\|h\|_p = \left(\int_X h^p\, d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,|g_k|\,|_p < \infty,$$

ou seja, $h \in L^p(X)$. Em particular, $h(x) < \infty$ para μ-q.t.p. $x \in X$ onde $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$.

Então, a série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ é absolutamente convergente μ-q.t.p. Seja $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, então g é mensurável. Resta provar que $g \in L^p(X)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = g$ em $L^p(X)$. Como $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ μ-q.t.p., temos que $|g| \le \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| = h \in L^p$, logo, pela monotonicidade da integral, $g \in L^p(X)$. As somas parciais $\sum_{k=1}^{n} g_k \to g$ μ-q.t.p., logo $\left|\sum_{k=1}^{n} g_k - g\right|^p \to 0$ μ-q.t.p.

Então,

$$\left|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p \le \left(|g| + \sum_{k=1}^{n} |g_k| \right)^p \le (h+h)^p = 2^p h^p \in L^1(X)\,.$$

Portanto, o teorema da convergência dominada é aplicável e implica

$$\int_X \left|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p d\,\mu \to 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} g_k \to g \;\text{ em } L^p(X)\,.$$

□