Aula 3 Medida de Jordan (continuação)

Lembre-se da aula passada:

$E \subset \mathbb{R}^d$ limitado

$$m_{*,J}(E) := \sup\{m(A) : A \subset E \text{ elementar}\}$$

$$m^{*,J}(E) := \inf\{m(B) : B \supset E \text{ elementar}\}$$

Se $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E) =: m(E)$

então E é Jordan mensurável.

E Jordan mis. sse $\forall \varepsilon > 0$ esistono $A \subset E \subset B$ elementari t.q.

$$m(B \setminus A) < \varepsilon .$$

Proposição (propriedades básicas da medida de Jordan)

(0) Se E, F são mensuráveis à Jordan

então

$$E \cup F, \quad E \cap F, \quad E \setminus F, \quad F \setminus E, \quad E \Delta F$$

são Jordan mensuráveis.

Além disso,

(1) positividade: $m(E) \geq 0$

(2) aditividade: Se $E \cap F = \emptyset$ então

$$m(E \sqcup F) = m(E) + m(F).$$

(3) invariância à translação

$$m(E + a) = m(E) \quad \forall a \in \mathbb{R}^d$$

---

(4) monotonicidade:

$$E \subset F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$$

(5) subaditividade

$$m(E \cup F) \leq m(E) + m(F).$$

<u>prova</u> exercício.

Sejam E, F mensuráveis à Jordan. Vamos provar que $E \cup F$ também é Jordan mens.

Fixe $\varepsilon > 0$. Para E, existem A, B elementares,

$$A \subset E \subset B, \quad m(B \setminus A) < \varepsilon$$

Para F, existem C, D elementares,

$$C \subset F \subset D, \quad m(D \setminus C) < \varepsilon.$$

Então

$$\underbrace{A \cup C}_{\text{elementares}} \subset E \cup F \subset \underbrace{B \cup D}$$

$$(B \cup D) \setminus (A \cup C) \subset (B \setminus A) \cup (D \setminus C)$$

$$\Rightarrow m\big((B \cup D) \setminus (A \cup C)\big) \leq m\big((B \setminus A) \cup (D \setminus C)\big)$$

$$\leq m(B \setminus A) + m(D \setminus C)$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Logo, $E \cup F$ é mensurável à Jordan.

$\square$

- Sejam E, F Jordan mens., $E \cap F = \emptyset$.

Vamos provar que

$$m(E \sqcup F) = m(E) + m(F).$$

" $\geq$ ": Vamos provar que

$$m(E \sqcup F) \geq m(E) + m(F)$$

Fixe $\varepsilon > 0$, arbitrário

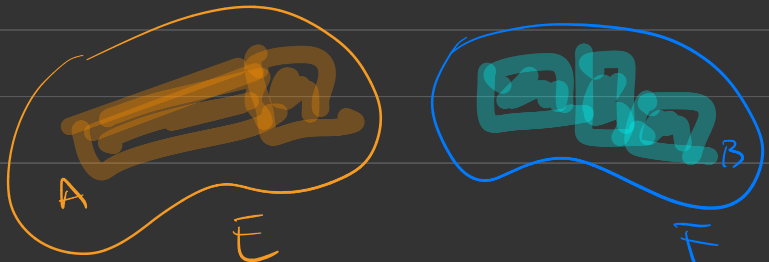
$m(E) = m_{*,J}(E) = \sup\{m(A) : A \subset E,\ A \text{ elementar}\}$

$\Rightarrow \exists\ A \subset E$ elementar,

$$m(A) > m(E) - \varepsilon$$

Similarmente, $\exists\ B \subset F$ elementar,

$$m(B) > m(F) - \varepsilon$$



Como $E \cap F = \emptyset$,

tem-se $A \cap B = \emptyset$

Como A, B são elementares, $A \cap B = \emptyset$,

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

$$> m(E) - \varepsilon + m(F) - \varepsilon$$

$$= m(E) + m(F) - 2\varepsilon$$

$A \cup B \subset E \cup F$ elementar $\Rightarrow m(E \cup F) \geq m(A \cup B)$

Segue que $m(E \cup F) \geq m(E) + m(F) - 2\varepsilon$

$\varepsilon \to 0$.

"$\leq$" Vamos provar que

$$m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$$

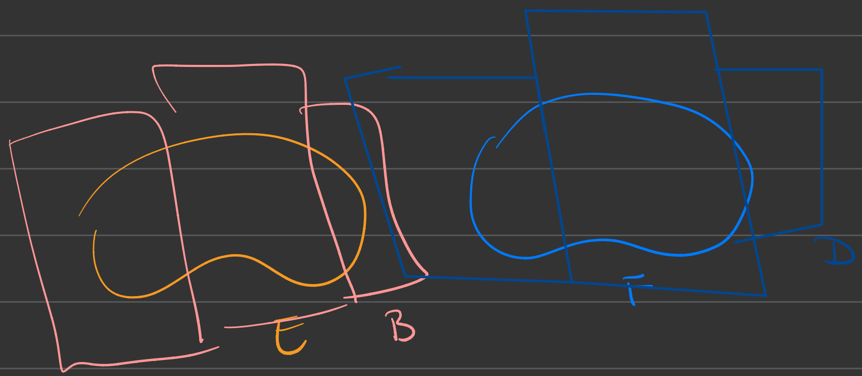
Fixe $\varepsilon > 0$, arbitrário.

$$m(E) = m^{*,J}(E) = \inf\{m(B) : B \supset E \text{ elementar}\}$$

$\Rightarrow \exists\, B \supset E$ elementar t.q. $m(B) < m(E) + \varepsilon$

Similarmente, $\exists\, D \supset F$ elementar t.q. $m(D) < m(F) + \varepsilon$ $(+)$

$$\Rightarrow \quad m(B) + m(D) \leq m(E) + m(F) + 2\varepsilon \qquad (1)$$



Como B, D são elementares,

$$m(B \cup D) \leq m(B) + m(D) \qquad (2)$$

Mas $B \cup D \supset E \cup F$, $B \cup D$ é elementar

$$\Rightarrow \quad m(E \cup F) \leq m(B \cup D) \qquad (3)$$

(1) + (2) + (3)

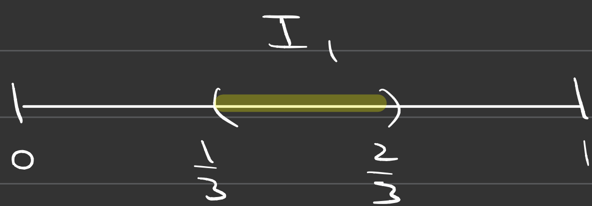
$$\Rightarrow m(\bar{E} \cup \bar{F}) \le m(\bar{E}) + m(\bar{F}) + 2\varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ $\boxed{\text{M}}$

<u>Exemplo</u> O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é Jordan mensurável e

$$m(\mathcal{C}) = 0.$$

<u>prova</u> Basta provar que $m^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$



$\mathcal{C}_1 := [0,1] \setminus I_1$

é um conjunto elementar e

$$m(\mathcal{C}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$I_2 = I_2^1 \cup I_2^2$$

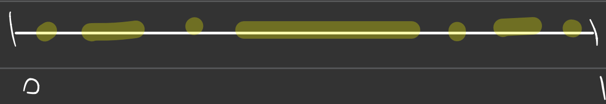
$$m(I_2) = 2 \cdot \frac{1}{3^2}$$

$$\mathcal{C}_2 = [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2)$$

elementer

$$m(\mathcal{C}_2) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$$

Depois de n passos,



$$m(I_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\mathcal{C}_n = [0,1] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n)$$

elementar,

$$m(\mathcal{C}_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{j-1}}{3^j}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \qquad \neq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} \, \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\cancel{1-\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow \quad m(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$$

Mas

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$$

Em particular, $\forall n \geq 1$

$$\underset{\text{elementar}}{\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n}$$

$$\Rightarrow m^{*,J}(\mathcal{C}) \leq m(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow m^{*,J}(\mathcal{C}) = 0 \qquad \blacksquare$$

<u>Exercício</u> Seja E um conjunto limitado em $\mathbb{R}^d$.

$\overline{E}$ = fecho de E

$\mathring{E}$ = interior de E

∂E = a fronteira de E = $\overline{E} \setminus \mathring{E}$

Prove que

(a) $m^{*,d}(E) = m^{*,d}(\overline{E})$

(b) $m_{*,d}(E) = m_{*,d}(\mathring{E})$

(c) E é mensurável à Jordan sse $m^{*,d}(\partial E) = 0$

<u>Exemplo</u> O conjunto

$$E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

não é mensurável à Jordan.

De fato, $\overline{E} = [0,1]$

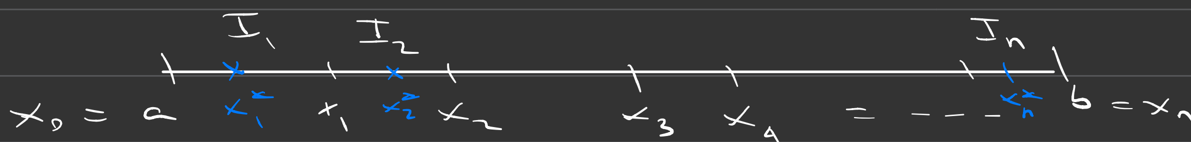
$$\Rightarrow m^{*,J}(E) = m^{*,J}(\overline{E}) = m^{J}[0,1] = 1$$

#

Mas, $\mathring{E} = \emptyset \Rightarrow m_{*,J}(E) = m_{*,J}(\mathring{E}) = 0$

1.4 A integral de Riemann - Darboux

A integral de Riemann Seja $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função.



Seja $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \ldots I_n\}$ uma partição de $[a,b]$

e seja

$$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$$

uma escolha de pontos de amostragem

$$x_j^* \in I_j \quad , \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta(\mathcal{P}) := \max\{|I_j| : j = 1, \dots, n\}$$

= a norma / a malha da partição $\mathcal{P}$

Mais ainda, seja

$$R(f, \mathcal{P}, \overline{x}^*) := \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*) \cdot |I_j|$$

a Soma de Riemann correspondente.

Definição f é dita integrável à Riemann

Se $\lim\limits_{\Delta(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*)$ existe.

Neste caso, o valor do limite $\mathcal{I}(f)$, é chamado a integral de Riemann de f.

significando o seguinte: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.q.

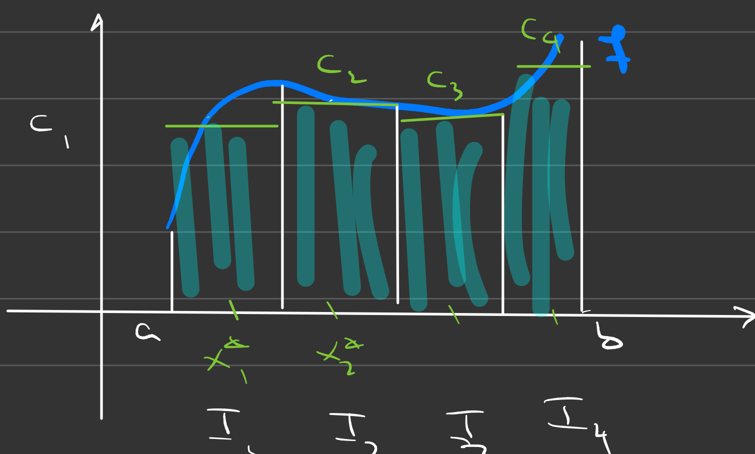
$\forall \mathcal{P}$ partição $\forall \bar{x}^*$ pontos de amostragem,

se $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$ então $|R(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*) - \mathcal{I}(f)| < \varepsilon$.

Lema Se f é integrável à Riemann, então f é limitada.

prova exercício.

Obs Sejam $f \geq 0$, $\mathcal{P}$ uma partição, $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ pontos de amostragem



$$c_j := f(x_j^*)$$

Então,

$$R(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, |I_j|$$