LISTA 2: CONJUNTOS MENSURÁVEIS À LEBESGUE

Exercício 1. Sejam $E \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.

(i) Prove a invariância por translações da medida de Lebesgue exterior:
$$m^*(x + E) = m^*(E).$$

(ii) Prove uma propriedade similar para a multiplicação:
$$m^*(x\, E) = |x|\, m^*(E),$$
onde $x\, E := \{x \cdot a \colon a \in E\}$.

Exercício 2. Seja $E \subset \mathbb{R}$ com $m^*(E) < \infty$.
Defina a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo
$$f(x) := m^*(E \cap (-\infty, x]).$$
Prove que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Exercício 3. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos.

(a) Prove que se para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $\left|f'(x)\right| \leq 1$, então para todo subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ vale o seguinte:
$$m^*(f(E)) \leq m^*(E).$$
Dizemos, neste caso, que a função f *contrai* a medida.
Dica: Use o teorema do valor médio do cálculo.

(b) Obtenha um exemplo de função diferenciável f tal que para algum x tem-se $\left|f'(x)\right| > 1$, mas f não contrai a medida.
Dica: Use o exercício 1(ii) acima.

Exercício 4. Obtenha um exemplo de conjunto $E \subset \mathbb{R}$ para o qual
$$m^*(E) > \sup \{m^*(U) \colon U \subset E, U \text{ é aberto}\}.$$
Com isso mostramos que o análogo *literal* da regularidade exterior para a regularidade interior é falso.

Os problemas seguintes estabelecem a aditividade finita de medida de Lebesgue para conjuntos compactos e abertos.

Exercício 5. Prove que se U e V são conjuntos *abertos* com $U \cap V = \emptyset$, então

$$m^*(U \cup V) = m^*(U) + m^*(V).$$

Exercício 6. Sejam K e L subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^d$) tais que $K \cap L = \emptyset$.

(i) Prove que $\text{dist}(K, L) > 0$, onde

$$\text{dist}(K, L) := \text{ínf}\,\{|x - y| : x \in K, y \in L\}.$$

(ii) Prove que existem dois conjuntos *abertos* U e V satisfazendo $K \subset U$, $V \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

(iii) Prove que

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L)\,.$$

Exercício 7. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto arbitrário. Mostre que existe um conjunto Lebesgue *measurável* E' tal que $E \subset E'$ e $m^*(E) = m(E')$.

Dica: Use a regularidade da medida de Lebesgue exterior.

Exercício 8. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$.

(i) Prove que se E está "perto de um aberto"(i.e. para todo $\epsilon > 0$, existe U aberto tal que $m^*(U \triangle E) < \epsilon$), então E é Lebesgue mensurável.

(ii) Prove que se E está "perto de um fechado"(i.e. para todo $\epsilon > 0$ existe F fechado tal que $m^*(E \triangle F) < \epsilon$) então E é "quase fechado"(i.e. para todo $\epsilon > 0$ existe F fechado tais que $F \subset E$ e $m^*(E \setminus F) < \epsilon$).

Exercício 9. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) E é Lebesgue mensurável e $m(E) < \infty$.

(2) E está "perto de um compacto": para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto K tal que $m^*(E \triangle K) < \epsilon$.

(3) E está "perto de um conjunto mensurável e limitado": para todo $\epsilon > 0$ existe S mensurável e limitado tal que $m^*(E \triangle S) < \epsilon$.

(4) E está "perto de um conjunto mensurável com medida finita": para todo $\epsilon > 0$ existe S mensurável tais que $m(S) < \infty$ e $m^*(E \triangle S) < \epsilon$.